



第2章 概率与统计

第1节 随机事件的概率、事件的相互独立性



题型上分练

1. C 【解析】甲同学有3种选择,乙同学有2种选择,故共有 $3 \times 2 = 6$ (种) 选择,其中甲、乙选择同一天的情况有2种,故甲、乙选择同一天的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. 故选 C.

2. D 【解析】系统从这四张图片中随机抽取两张进行识别,则选出的两张图片中,恰好一张是“龙”,另一张是“蛇”的概率为 $\frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_4^2} = \frac{2 \times 2}{6} = \frac{2}{3}$.

3. D 【解析】∵ 容器左、右两端都有开口,每次只能从容器的一端取出1个球,∴ 前4次取球,每次可从左取或从右取,有2种情况,最后1次从左取和从右取结果相同,有1种情况,因此不同取法种数为 $2^4 = 16$.

2个红球被连续取出的情况如下:

- ①在第1,2次取出2个红球,再取另外3个白球,有4种方法;
 - ②在第2,3次取出2个红球,则第1次取白球,有2种方法;
 - ③在第3,4次取出2个红球,则第1,2次取白球,有1种方法;
 - ④在第4,5次取出2个红球,则第1,2,3次取白球,有2种方法.
- ∴ 2个红球被连续取出的方法共有 $4 + 2 + 1 + 2 = 9$ (种), ∴ 所求概率为 $\frac{9}{16}$.

4. C 【解析】三位游客分别从四个景点中随机选择一个,共有 $4 \times 4 \times 4 = 64$ (种) 情况.

恰有两人选择同一景点的情况,可以先从三位游客中选择两位,有 C_3^2 种方法,让他们选择同一个景点,有4种选择,最后剩下的游客有3种选择,所以恰有两人选择同一景点的情况有 $C_3^2 \times 4 \times 3 = 36$ (种).

所以恰有两人选择同一景点的概率 $P = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$. 故选 C.

5. B 【解析】(列举法) 在1,2,3,⋯,9这9个数中取3个,有 C_9^3 种取法,其中3个数之和为3的倍数的情况有123,126,129,135,138,147,156,159,168,189,234,237,246,249,258,267,279,345,348,357,369,378,456,459,468,489,567,579,678,789,共30种. 故所求概率为 $\frac{30}{C_9^3} = \frac{5}{14}$. 故选 B.

一题多解 设集合 $A_1 = \{1, 4, 7\}$, $A_2 = \{2, 5, 8\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$, 任取3个数的和为3的倍数,分为两类:一类是从集合 A_1 或 A_2 或 A_3 中取3个数,另一类是从三个集合中各取1个数. 所以取出的3个数之和是3的倍数的概率为 $\frac{3 + 3 \times 3 \times 3}{C_9^3} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$. 故选 B.



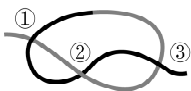
6. B 【解析】若 $\frac{\pi}{x}, \frac{\pi}{y}, \frac{\pi}{z}$ 是直角三角形的三个内角, 则 $\frac{\pi}{x} +$

$$\frac{\pi}{y} + \frac{\pi}{z} = \pi, \text{ 即 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

因为 $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 所以这三个数只能是 2, 3, 6 或 2, 4, 4, 所以 $\frac{\pi}{x}, \frac{\pi}{y}, \frac{\pi}{z}$ 是直角三角形的三个内角的概率为

$$\frac{A_3^3 + A_3^1}{6^3} = \frac{1}{24}. \text{ 故选 B.}$$

7. B 【解析】如图所示, 考虑绳子在三个交叉处的位置关系, 每个交叉处有两种可



能, 先假定②处灰色在上, 则此时①③各有 2 种情形, 即共有 4 种情形, 只有①③处都是灰色在下时可以拉成结, 故概率为 $\frac{1}{4}$. 同理, ②处灰色在下时, ①③处都是灰色在上时可以拉成

结, 概率也是 $\frac{1}{4}$. 故所求概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. 故选 B.

8. A 【解析】从给定的 7 个数中任取 3 个排成一个数列, 有 A_7^3 种情况, 能构成等差数列的有: 公差为 ± 1 的有 5×2 个, 公差为 ± 2 的有 3×2 个, 公差为 ± 3 的有 1×2 个 (易错: 数列是有顺序的, 正排和倒排不一样, 故要乘 2), 共 18 种情况.

所以得到的数列为等差数列的概率为 $\frac{18}{A_7^3} = \frac{18}{210} = \frac{3}{35}$. 故选 A.

9. $\frac{8}{15}$ 【解析】设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 数字代表对应标号的小球.

根据题意, 一次至少取 1 个球, 总的取球情况数即为集合 A

关键点

的非空子集的个数, 即 $2^4 - 1 = 15$, 满足取出的球的标号之和不超过 5 的样本点有 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}$, 共 8 个, 所以取出的球的标号之和不超过 5 的概率为 $\frac{8}{15}$.

10. BC 【解析】根据题意, 连续抛掷两次骰子的样本空间中

共有 36 个样本点.
 $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$, 共 18 个样本点.

事件 B 中有 9 个样本点, 则 $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, 故 A 错误.

事件 C 中有 $4 \times 6 = 24$ (个) 样本点, 所以 $P(C) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, 故

B 正确.

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{2}{3}, P(AC) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = P(A) \cdot$$

$P(C)$, 故 C 正确.

事件 A 与事件 B 能同时发生, 所以不互斥, 故 D 错误. 故选 BC.

11. BD 【解析】因为 $P(AB) = \frac{1}{3} \neq 0$, 所以事件 A 与 B 不互斥,



故 **A** 错误, **B** 正确.

因为 $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. 又

$P(AB) = \frac{1}{3}$, 所以 $P(AB) = P(A)P(B)$, 所以事件 A 与 B 相

互独立, 故 **C** 错误, **D** 正确. 故选 **BD**.

12. ABC 【解析】依题意, 抛掷一次可能出现的结果有 2, 5, 7, 70,

事件 A 包含的样本点有 2, 70, 则 $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

事件 B 包含的样本点有 5, 70, 则 $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

事件 C 包含的样本点有 7, 70, 则 $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

显然事件 A 与事件 B , 事件 A 与事件 C , 事件 C 与事件 B 均可以同时发生, 故事件 A 与事件 B , 事件 A 与事件 C , 事件 C 与事件 B 均不互斥, 故 **A** 错误.

事件 $A \cup B$ 包含的样本点有 2, 5, 70, 事件 $B \cap C$ 包含的样本点有 70.

当出现数字 70 时, 事件 $A \cup B$ 与事件 $B \cap C$ 均发生, 故事件 $A \cup B$ 与事件 $B \cap C$ 不互斥, 显然也不对立, 故 **B** 错误.

事件 ABC 包含的样本点有 70, 所以 $P(ABC) = \frac{1}{4}$, 所以 $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$, 故 **C** 错误.

因为事件 BC 包含的样本点有 70, 所以 $P(BC) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$, 所以 B 与 C 相互独立;

因为事件 AB 包含的样本点有 70, 所以 $P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, 所以 A 与 B 相互独立;

因为事件 AC 包含的样本点有 70, 所以 $P(AC) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$, 所以 A 与 C 相互独立.

故事件 A, B, C 两两独立, 故 **D** 正确. 故选 **ABC**.

13. C 【解析】依题意, 该同学在这次测试中仅有一项测试结果为优秀的概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$. 故选 **C**.

14. B 【解析】小李获得冠军的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 则小胡获得冠军的概率为 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. 故选 **B**.

15. B 【解析】因为事件 A 和 B 相互独立, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, 所以 $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.5 - 0.1 = 0.6$. 故选 **B**.

16. C 【解析】由 A, B, C 两两独立得到 $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{4}{9} = P(AC) = P(BC)$,



设 $P(ABC) = x, x \in [0, 1]$, 则 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{2}{3} \times 3 - \frac{4}{9} \times 3 + x = \frac{2}{3} + x \in (0, 1]$, 解得 $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

又 $P(\overline{AB} \overline{C}) = P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \times 2 + x =$

关键点

$x - \frac{2}{9} \in [0, 1]$, 所以 $x \in \left[\frac{2}{9}, 1\right]$.

综上, $x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$.

17. C 【解析】“至少有一天淋雨”的对立事件为“两天都不淋雨”, 连续上两天班, 上班、下班的次数共有 4 次.

(1) 4 次均不下雨, 概率为 $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$.

(2) 有 1 次下雨但不淋雨, 则第一天或第二天上班时下雨, 概率为 $2 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{54}{256}$.

(3) 有 2 次下雨但不淋雨, 共 3 种情况:

① 同一天上下班均下雨;

② 两天上班时下雨, 下班时不下雨;

③ 第一天上班时下雨, 下班时不下雨, 第二天上班时不下雨, 下班时下雨,

概率为 $2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{36}{256}$.

(4) 有 3 次下雨但不淋雨, 则第一天或第二天下班时不下雨, 概率为 $2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{256}$.

(5) 4 次均下雨, 概率为 $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$.

两天都不淋雨的概率为 $\frac{81}{256} + \frac{54}{256} + \frac{36}{256} + \frac{6}{256} + \frac{1}{256} = \frac{178}{256}$,

所以至少有一天淋雨的概率为 $1 - \frac{178}{256} = \frac{78}{256} = \frac{39}{128}$. 故选 C.

18. $\frac{16}{243}$ 【解析】将传球过程分为三个阶段: ① 第一次传球, 甲

必须传给乙、丙、丁中的一人, 此阶段概率为 1 (因为必然传出); ② 第二次到第五次传球 (共四次), 每次传球必须传给

除甲和传球者之外的两人, 每次传球的概率为 $\frac{2}{3}$, 根据相互

独立事件概率乘法公式, 可知这 4 次的概率为 $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; ③ 第

六次传球, 必须传给甲, 概率为 $\frac{1}{3}$. 将三个阶段的概率相乘即可.

由甲开始传球, 中间四次每次传球均传给除甲和传球者之外的其余两人之一, 最后再传给甲, 所以所求概率为 $1 \times$



$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}.$$

19. 【解】(1) (列举法) 用 x_1, x_2 分别表示甲、乙两人出拳手势, 则可以用 (x_1, x_2) 表示一局比赛的结果, 用 1, 2, 3 分别表示出拳手势为石头、剪刀、布, 则甲、乙两人进行一局比赛的结果有 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$, 共 9 个样本点, 记事件 $A =$ “甲、乙进行一局比赛甲获胜”, 则 A 包含的样本点有 $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$, 共 3 个, 所以 $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, 即甲获胜的概率为 $\frac{1}{3}$.

(2) 记事件 $B =$ “甲、乙两人进行三局比赛, 甲获胜局数多于乙获胜局数”, 则 B 包含甲胜三局、甲胜两局负一局、甲胜两局平一局、甲胜一局平两局四种情况.

关键点

由 (1) 可知, 一局比赛甲获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 同理乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 则平局的概率为 $\frac{1}{3}$, 所以甲胜三局的概率 $P_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$,

甲胜两局负一局的概率 $P_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$,

甲胜两局平一局的概率 $P_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$,

甲胜一局平两局的概率 $P_4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$,

所以 $P(B) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{27}$, 即甲获胜局数多于乙获胜局数的概率为 $\frac{10}{27}$.

20. 【解】(1) 第 3 道谜语由甲猜, 有如下四种情况:

① 甲猜对第 1 道谜语, 甲猜对第 2 道谜语, 概率为 $P_1 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$;

② 甲猜错第 1 道谜语, 乙猜错第 2 道谜语, 概率为 $P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$;

③ 乙猜对第 1 道谜语, 乙猜错第 2 道谜语, 概率为 $P_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;

④ 乙猜错第 1 道谜语, 甲猜对第 2 道谜语, 概率为 $P_4 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.



故第3道谜语由甲猜的概率为 $\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{17}{36}$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 记第 n 道谜语由乙猜的概率为 P_n , 第 $(n-1)$ 道谜语由乙猜的概率为 P_{n-1} , 则由甲猜的概率为 $1 - P_{n-1}$.

由题意可知, $P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - P_{n-1}) (n \geq 2)$, 整理得 $P_n =$

突破点

$\frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}$, 可化为 $P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(P_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$, 可得数列

$\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

又 $P_1 = 1$, 则 $P_{30} - \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{30-1}$, 可得 $P_{30} = \frac{1}{2} +$

$\frac{1}{2 \times 3^{29}}$.



综合提分练

1. C 必刷考点 ① 古典概型

【解析】从5张卡片中抽取2张, 共有 $C_5^2 = 10$ (种) 可能, 抽到的2张卡片上的数字乘积为负数, 即一正一负, 共 $C_2^1 C_3^1 = 4$ (种) 可能, 所以抽到的2张卡片上的数字乘积为负数的概率

$P_1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, 则抽到的2张卡片上的数字乘积为非负数的

概率 $P = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ (提示: 正难则反).

2. C 必刷考点 ② 相互独立事件的应用

【解析】由题意知蜻蜓沿逆时针方向飞的概率是 $\frac{3}{4}$, 沿顺时

针方向飞的概率是 $\frac{1}{4}$.

蜻蜓飞三次要回到A叶上只有两条途径:

第一条: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, 此时停在A叶上的概率 $P_1 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times$

$\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$;

第二条: $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, 此时停在A叶上的概率 $P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

所以飞三次之后停在A叶上的概率 $P = P_1 + P_2 = \frac{27}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{16}$.

3. BD 必刷考点 ③ 相互独立事件的概率

【解析】对于A: 设甲、乙、丙三个小组各自攻克该技术难题为

事件 A, B, C , 所以 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{4}$, 只有一个

小组受到奖励的概率为 $P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) =$

$\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times$

$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$, 所以A错误;



对于 B: 技术难题被攻克的概率为 $1 - P(\overline{ABC}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, 所以 **B 正确**;

对于 C: 只有甲、丙小组受到奖励的概率为 $P(A\overline{B}C) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$, 所以 **C 错误**;

对于 D: 甲、乙、丙三个小组均受到奖励的概率为 $P(ABC) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$, 所以 **D 正确**.

4. ACD 必刷考点 ⊙ 互斥事件的概率加法公式、相互独立事件的概率乘法公式

【解析】对于 A, 若 A 与 B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{4}$, 故 **A 正确**;

对于 B, 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{8}$, 故 **B 错误**;

对于 C, 若 A 与 B 相互独立, 则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立, 则 $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{3}{8}$, 故 **C 正确**;

对于 D, 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{5}{8}$, 故 **D 正确**. 故选 ACD.

5. BCD 必刷考点 ⊙ 相互独立事件的判断

【解析】M, N 两个单位招志愿者的不同选法种数为 $A_4^2 = 12$.

因为事件 ST 所包含的基本事件为 (M 招甲, N 招丙), (M 招乙, N 招甲), (M 招乙, N 招丙), 共 3 个, 所以 $P(ST) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

因为 $P(S)P(T) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(ST)$, 所以事件 S, T 相互独立, 故 **A 正确**.

$P(S)P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 同理得 $P(SE) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, 故 **B 错误**.

$P(S)P(H) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 同理得 $P(SH) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, 故 **C 错误**.

因为 E, H 为对立事件, 所以 $P(EH) = 0$, 故 **D 错误**. 故选 BCD.

6. $\frac{7}{10}$ 必刷考点 ⊙ 古典概型求概率

【解析】 $X > Y$ 可分为两类: X 中有 7 和 X 中无 7.



由题意, $P(X \text{ 中有 } 7) = \frac{C_6^2}{C_7^3} = \frac{3}{7}$, $P(X \text{ 中无 } 7) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

若 X 中含 7, 则 $X > Y$ (提示: 题干中说构成最大的三位数, 所以若有 7, 则 7 一定在百位);

若 X 中无 7, 则 $P(X=Y) = \frac{C_6^3}{C_6^3 \cdot C_6^3} = \frac{1}{20}$, 此时 $P(X > Y) = P(X < Y) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{19}{40}$.

所以 $P(X > Y) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{19}{40} = \frac{7}{10}$.

7. $\frac{2}{3}$ $\frac{14}{27}$ 必刷考点 ⊙ 古典概型、互斥事件

【解析】第 1 个盒子中有 2 个白球和 1 个黑球, 则从第 1 个盒子中取到白球的概率是 $\frac{2}{3}$.

① 当从第 1 个盒子中取到白球时, 第 2 个盒子中有 2 个白球和 1 个黑球,

若从第 2 个盒子中取到白球, 则第 3 个盒子中有 2 个白球和 1 个黑球, 故取到白球的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

若从第 2 个盒子中取到黑球, 则第 3 个盒子中有 1 个白球和 2 个黑球, 故取到白球的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.

② 当从第 1 个盒子中取到黑球时, 第 2 个盒子中有 1 个白球和 2 个黑球,

若从第 2 个盒子中取到白球, 则第 3 个盒子中有 2 个白球和 1 个黑球, 故取到白球的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$;

若从第 2 个盒子中取到黑球, 则第 3 个盒子中有 1 个白球和 2 个黑球, 故取到白球的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.

综上, 从第 3 个盒子中取到白球的概率是 $\frac{8}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{14}{27}$.

8. 必刷题型 ⊙ 不相邻排列问题、有限制的排列问题、古典概型问题

【解】(1) 记“五张字母牌互不相邻”为事件 M , 则 $P(M) = \frac{A_8^8 A_9^5}{A_{13}^{13}} = \frac{14}{143}$.

(2) 记“在标有 8 的卡牌左侧没有数字牌”为事件 N , 由于标有 1, 2, 3, $\dots$, 7 的牌都在标有 8 的牌的右侧, 则有 A_7^7 种排法, 所以 $P(N) = \frac{A_7^7 A_{13}^5}{A_{13}^{13}} = \frac{1}{8}$.

(3) 标号比 k 小的数字牌有 $(k-1)$ 张, 比 k 大的数字牌有 $(8-k)$ 张, $P(A_k) = \frac{(k-1)! A_{13}^{5+8-k}}{A_{13}^{13}} = \frac{1}{k} (k=1, 2, 3, \dots, 8)$.



9. 必刷考点 ⊙ 相互独立事件的概率乘法公式

【解】(1) 第 3 次停留在网页 D 上的事件有 $A \rightarrow B \rightarrow D, A \rightarrow C \rightarrow D$, 其概率 $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(2) 由题意知, 存在的全部路径为 $A \rightarrow B, A \rightarrow C; B \rightarrow C, B \rightarrow D; C \rightarrow A, C \rightarrow D; D \rightarrow A, D \rightarrow B, D \rightarrow C$.

用 $A_i, B_i, C_i, D_i (1 \leq i \leq 4)$ 表示第 i 次停留在 A, B, C, D 处的事件,

则 $P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (提示: 路径 $A \rightarrow C \rightarrow A$), $P(B_3) = 0$,

$P(C_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (提示: 路径 $A \rightarrow B \rightarrow C$), $P(D_3) = \frac{1}{2}$,

所以 $P(B_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$, $P(C_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$.

又 $P(B_1) = P(C_1) = 0, P(B_2) = P(C_2) = \frac{1}{2}$, 所以前 4 次在网页 B 上停留的平均次数 $E(B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{24}$, 前 4 次在网页 C 上停留的平均次数 $E(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{7}{24} > E(B)$, 故该公司应该选择网页 C .

真题风向练

10. $\frac{1}{2}$ 命题点 ⊙ 古典概型的概率计算、排列组合的应用

【解析】假设乙固定按照 2, 4, 6, 8 的顺序, 则甲所有的可能如表所示.

1	3	5	7	√	5	1	3	7	√
1	3	7	5	√	5	1	7	3	
1	5	3	7	√	5	3	1	7	√
1	5	7	3		5	3	7	1	
1	7	3	5	√	5	7	1	3	
1	7	5	3	√	5	7	3	1	
3	1	5	7	√	7	1	3	5	√
3	1	7	5		7	1	5	3	√
3	5	1	7		7	3	1	5	√
3	5	7	1		7	3	5	1	√
3	7	1	5		7	5	1	3	
3	7	5	1		7	5	3	1	

从中找均小于 2, 4, 6, 8 与有 3 个数字分别小于 2, 4, 6, 8 的情况, 此时甲得 0 分或 1 分, 符合上述情况的有表中打√的 12 种情况.

那么甲的总得分不小于 2 分也有 12 种情况, 由古典概型概率公式得所求概率为 $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ (说明: 固定乙的顺序, 将甲的情况排列出来, 去挑选, 也可以从中判断甲有 2 个及以上的



数字超过乙的. 如果改变乙的顺序, 其情况是类似的).

一题多解 不妨设甲四轮比赛中所选卡片顺序固定, 即四轮比赛所选卡片依次为 1, 3, 5, 7, 此时乙有 $A_4^4 = 24$ (种) 选法. 甲可能得 0, 1, 2, 3 分, 但不可能得 4 分.

当甲得 2 分时,

若甲第二、三轮的数字大, 则有 1 种选法;

若甲第二、四轮的数字大, 则有 $A_2^2 + 1 = 3$ (种) 选法;

若甲第三、四轮的数字大, 则有 $A_2^2 A_2^2 + 1 + A_2^2 = 7$ (种) 选法,

共有 $1 + 3 + 7 = 11$ (种) 选法.

当甲得 3 分时, 甲第一轮的数字小, 其他三轮的数字大, 有 1 种选法.

故甲的总得分不小于 2 的概率 $P = \frac{11+1}{24} = \frac{1}{2}$.

第 2 节 条件概率与全概率公式



题型上分练

1. B 【解析】设选择邮件投诉为事件 A , 维权成功为事件 B , 则

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{13}{100} = \frac{4}{5}, P(AB) = \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{100},$$

故在维权成功的条件下, 选择邮件投诉的概率为 $P(A|B) =$

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{4}{5}} \times \frac{5}{4} = \frac{27}{80}. \text{ 故选 B.}$$

2. C 【解析】已知第一次取出白球后, 剩余 2 个白球、5 个黑球.

要使得剩下的球为黑球, 由于每个球被取出的概率相等,

所以只需考虑最后 1 个被取出的球是黑球即可, 故所求概率

$$\text{为 } \frac{5}{7}.$$

3. A 【解析】记事件 A 为摸出 n 个球颜色相同, 事件 B 为摸出

$$n \text{ 个黑球, 则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \text{ (提示: } B \subseteq A \text{)}.$$

$$P(A) = \frac{C_{2n}^n + C_{2n-1}^n}{C_{4n-1}^n}, P(B) = \frac{C_{2n-1}^n}{C_{4n-1}^n}, \text{ 因此 } P(B|A) = \frac{C_{2n-1}^n}{C_{2n}^n + C_{2n-1}^n}.$$

$$\text{由组合数性质, 得 } C_{2n}^n = C_{2n-1}^n + C_{2n-1}^{n-1} = 2C_{2n-1}^n, \text{ 故 } P(B|A) = \frac{1}{3}.$$

故选 A.

4. B 【解析】由 $P(\bar{A}|B) = P(B|A)$, 可得 $\frac{P(\bar{AB})}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

$$\text{又 } P(\bar{AB}) + P(AB) = P(B), \text{ 即 } P(\bar{AB}) = P(B) - P(AB),$$

$$\text{所以 } \frac{P(B) - P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ 即 } 1 - \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

$$\text{所以 } 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ 即 } \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

$$\text{即 } \frac{P(\bar{AB})}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ 于是 } P(\bar{B}|A) = P(A|B). \text{ 故选 B.}$$



5. C 【解析】由题意知,事件 A 包含的样本点个数为 $n(A) = C_5^4 \cdot A_4^4 = 120$.

对于事件 B ,

含“1,2,3”的“局部等差”数列分别为“1,2,3,5”“5,1,2,3”“4,1,2,3”,含“3,2,1”的“局部等差”数列同理,故共有 6 个;

含“3,4,5”的和含“5,4,3”的共有 6 个;

含“2,3,4”的有“5,2,3,4”“2,3,4,1”,含“4,3,2”的同理,故共有 4 个,

含“1,3,5”的有“1,3,5,2”“2,1,3,5”“4,1,3,5”“1,3,5,4”,含“5,3,1”的同理,故共有 8 个.

所以事件 AB 包含的样本点个数为 $n(AB) = 24$,

所以 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$. 故选 C.

6. $\frac{3}{5}$ 【解析】先求从盒子里依次取出 2 个球,取出的球有红球的概率,再求第二次取出的球是红球的概率,然后利用条件概率公式求解.

设事件 A 为取出的球有红球,事件 B 为第二次取出的球是红球.

从 7 个球中依次取出 2 个球,共有 $A_7^2 = 42$ (种) 不同取法,取出的球没有红球,即取的是白球或黑球,有 $A_4^2 = 12$ (种) 不同取法,所以从盒子里依次取出 2 个球,取出的球有红球的概率

$$P(A) = 1 - \frac{12}{42} = \frac{5}{7}.$$

第二次取出的球是红球,分两种情况:①第一次取出的球不是红球,第二次取出红球,有 $A_4^1 A_3^1 = 12$ (种) 不同取法;

②两次都取出红球,有 $A_3^1 A_2^1 = 6$ (种) 不同取法,所以第二次取出的球是红球有 $12 + 6 = 18$ (种) 不同取法.

所以第二次取出的球是红球的概率 $P(B) = \frac{18}{42} = \frac{3}{7} =$

$$P(AB), \text{ 所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{5}.$$

7. $\frac{2}{5}$ 【解析】因为 $P(N) = \frac{2}{5}, P(M|N) = \frac{P(MN)}{P(N)} = \frac{1}{3},$

$$\text{所以 } P(MN) = P(M|N)P(N) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

$$\text{又 } P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(MN) = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } P(M) = P(M \cup N) + P(MN) - P(N) = \frac{3}{5} + \frac{2}{15} - \frac{2}{5} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}.$$

8. 【解】(1) 设无障碍时红方、蓝方发射炮弹攻击对方目标击中分别为事件 A_1, A_2 , 则 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{3},$



设红方、蓝方空中拦截对方炮弹成功分别为事件 B_1, B_2 , 则

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, P(B_2) = \frac{1}{4}.$$

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{B}_2) = P(A_1)[1 - P(B_2)] = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P(A_2)P(\bar{B}_1) = P(A_2)[1 - P(B_1)] = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \quad (\text{提示: 相互独立事件的应用}).$$

(2) 经过 1 轮对抗, 红方与蓝方击中对方目标次数之差 X 的所有可能取值为 $1, 0, -1$,

$$P(X=1) = P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = [1 - P(A)]P(B) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$P(X=-1) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6},$$

$$P(X=0) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$\text{所以 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + (-1) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

(3) 设 3 轮对抗后训练结束为事件 C , 红方多击中蓝方目标两次为事件 D , 3 轮对抗后红方与蓝方击中对方目标次数之差为 Y ,

$$P(CD) = P(Y=2)$$

$$= P(X=1)P(X=0)P(X=1) + P(X=0)P(X=1)P(X=1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(Y=-2) = P(X=-1)P(X=0)P(X=-1) + P(X=0)P(X=-1)P(X=-1)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$\text{所以 } P(C) = P(Y=2) + P(Y=-2) = \frac{5}{36},$$

$$\text{所以 } P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{36}} = \frac{4}{5},$$

所以在恰好经过 3 轮对抗后训练结束的条件下, 红方多击中蓝方目标两次的概率为 $\frac{4}{5}$.

9. C 【解析】设事件 D 为这个人患流感, 事件 A_1, A_2, A_3 分别表



示这个人来自 A, B, C 三个地区.

$$\text{由已知可得 } P(A_1) = \frac{3}{3+2+1} = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{2}{3+2+1} = \frac{1}{3},$$

$$P(A_3) = \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{6},$$

$$\text{又 } P(D|A_1) = 6\%, P(D|A_2) = 5\%, P(D|A_3) = 4\%,$$

$$\text{由全概率公式得 } P(D) = P(A_1) \cdot P(D|A_1) + P(A_2) \cdot$$

$$P(D|A_2) + P(A_3) \cdot P(D|A_3) = 6\% \times \frac{1}{2} + 5\% \times \frac{1}{3} + 4\% \times \frac{1}{6} =$$

$$\frac{4}{75}. \text{ 故选 C.}$$

10. AC 【解析】 A_1, A_2, A_3 的市场占有率分别为 $P(A_1) = 0.5$,

$P(A_2) = 0.3, P(A_3) = 0.2$, A_1, A_2, A_3 的优质品率分别为

$P(B|A_1) = 0.9, P(B|A_2) = 0.8, P(B|A_3) = 0.7$.

对于 A, 因为 A_1, A_2 互斥, 所以 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) +$

$P(A_2) = 0.5 + 0.3 = 0.8$ (提示: 互斥事件的概率加法公式),

故 A 正确;

对于 B, $P(A_2B)$ 表示买到乙品牌的工具刀且为优质品的概率,

则 $P(A_2B) = P(A_2) \times P(B|A_2) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$, 故 B 错

误;

对于 C, 由全概率公式得 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2) \cdot$

$P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.5 \times 0.9 + 0.3 \times 0.8 + 0.2 \times 0.7 =$

0.83 , 故 C 正确;

对于 D, 由贝叶斯公式得 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} =$

$$\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.5 \times 0.9}{0.83} \approx 0.54, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.}$$

11. A 【解析】设 A_n 表示第 n 个月去 A 公司, 则 $P_n = P(A_n)$,

$$P(\bar{A}_n) = 1 - P_n. \text{ 根据题意, 得 } P(A_{n+1}|A_n) = \frac{1}{3}, P(A_{n+1}|\bar{A}_n) = \frac{1}{2}.$$

由全概率公式得 $P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot P(A_{n+1}|A_n) + P(\bar{A}_n) \cdot$

$$P(A_{n+1}|\bar{A}_n) = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{2}(1 - P_n) = -\frac{1}{6}P_n + \frac{1}{2}, \text{ 即 } P_{n+1} =$$

$$-\frac{1}{6}P_n + \frac{1}{2}, \text{ 整理得 } P_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(P_n - \frac{3}{7}\right).$$

又 $P_1 - \frac{3}{7} = \frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{5}{21} \neq 0$, 所以 $\left\{P_n - \frac{3}{7}\right\}$ 是以 $\frac{5}{21}$ 为首项,

$-\frac{1}{6}$ 为公比的等比数列, 所以 $P_n = \frac{3}{7} + \frac{5}{21} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$, 则

$$P_{10} = \frac{3}{7} + \frac{5}{21} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^9. \text{ 故选 A.}$$

12. $\frac{2}{5} \quad \frac{1}{2}$ 【解析】记事件 A_i = “第 i 次取到红球”, 则

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{12} = \frac{1}{5} \text{ (提示: 概率的乘法$$

公式), $P(\bar{A}_1A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{5}$, 所以

$P(A_2) = P(A_1A_2) + P(\bar{A}_1A_2) = \frac{2}{5}$, 即第 2 次取到红球的概率



为 $\frac{2}{5}$.

$$P(A_2\bar{A}_3) = P(A_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) = P(A_1A_2)P(\bar{A}_3|A_1A_2) + P(\bar{A}_1A_2)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1A_2) = \frac{1}{5} \times \frac{6}{14} + \frac{1}{5} \times \frac{8}{14} = \frac{1}{5} \quad (\text{提示: 全概率$$

公式的应用), 所以 $P(\bar{A}_3|A_2) = \frac{P(A_2\bar{A}_3)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$, 即在第 2

次取到红球的前提下, 第 3 次取到白球的概率为 $\frac{1}{2}$.

13. $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{8}$ 【解析】用 $A_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示 i 号箱子有奖品,

用 B_i 表示主持人打开 i 号箱子,

$$\text{由题知 } P(B_2|A_1) = \frac{1}{3}, P(B_2|A_2) = 0, P(B_2|A_3) = \frac{1}{2},$$

$$P(B_2|A_4) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } P(B_2) = \sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B_2|A_i) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P(A_4|B_2) = \frac{P(A_4B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(A_4)P(B_2|A_4)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}.$$

14. 【解】设 A_1 表示“球员甲当前锋”, A_2 表示“球员甲担当后卫”, A_3 表示“球员甲担当中场”, B 表示“球队赢了某场比赛”.

(1) 由全概率公式得 $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = 0.5 \times 0.6 + 0.3 \times 0.8 + 0.2 \times 0.7 = 0.30 + 0.24 + 0.14 = 0.68$, 故该球队在甲出场比赛时, 输球的概率为 $1 - P(B) = 1 - 0.68 = 0.32$.

(2) 由 (1) 知 $P(B) = 0.68$, 所以 $P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{0.3 \times 0.8}{0.68} = \frac{6}{17}$, 所以在球队获胜的条件下, 球员甲担当后卫的概率为 $\frac{6}{17}$.

(3) 由题意及 (1), 得 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{0.5 \times 0.6}{0.68} = \frac{15}{34}$,

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.7}{0.68} = \frac{7}{34}.$$

由于 $P(A_1|B) > P(A_2|B) > P(A_3|B)$, 所以球员甲最有可能在场上担当前锋.



综合提分练

1. $\frac{13}{800} \quad \frac{21}{65}$ 必刷考点 ⊙ 全概率公式、贝叶斯公式



【解析】记事件 M : 任取一瓶茭实酒, 该瓶酒是不合格品, 事件 N_1 : 任取一瓶茭实酒, 该瓶酒由 A 厂生产, 则 $P(N_1) = 20\% = \frac{1}{5}$, $P(M|N_1) = 0.01$;

记事件 N_2 : 任取一瓶茭实酒, 该瓶酒由 B 厂生产, 则 $P(N_2) = 35\% = \frac{7}{20}$, $P(M|N_2) = 0.015$;

记事件 N_3 : 任取一瓶茭实酒, 该瓶酒由 C 厂生产, 则 $P(N_3) = 45\% = \frac{9}{20}$, $P(M|N_3) = 0.02$,

故 $P(M) = P(N_1) \cdot P(M|N_1) + P(N_2) \cdot P(M|N_2) + P(N_3) \cdot$

$P(M|N_3) = \frac{1}{5} \times 0.01 + \frac{7}{20} \times 0.015 + \frac{9}{20} \times 0.02 = \frac{13}{800}$ (提示: 全概

率公式的应用), $P(N_2|M) = \frac{P(N_2) \cdot P(M|N_2)}{P(M)} = \frac{\frac{7}{20} \times 0.015}{\frac{13}{800}} =$

$\frac{21}{65}$ (提示: 贝叶斯公式的应用).

2. $\frac{5}{72}$ 必刷考点 ⑥ 分步乘法计数原理、条件概率

【解析】设“每行都放置两枚棋子”为事件 A , “每列都有两枚棋子”为事件 B , 则所求概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)}$.

每行都放置两枚棋子, 即每行都在 4 个方格中选 2 个放置棋子, 有 C_4^2 种方法, 所以 $n(A) = C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 1\,296$.

对于“每行每列都放置两枚棋子”, 不妨令第一行的两枚棋子放置在左边第一、二个方格, 此时第二行有 $C_4^2 = 6$ (种) 放置方法, 则第三、四行的放置方法如图,

•	•		
•	•		
		•	•
		•	•

图①

•	•		
•		•	
	A_1	A_2	•
	A_2	A_1	•

图②

•	•		
•			•
	B_1	•	B_2
	B_2	•	B_1

图③

•	•		
	•	•	
C_1		C_2	•
C_2		C_1	•

图④

•	•		
	•		•
D_1		•	D_2
D_2		•	D_1

图⑤

•	•		
		•	•

图⑥

图①有 1 种方法, 图②至⑤各有 2 种方法, 图⑥中, 第三行有 $C_4^2 = 6$ (种) 放置方法, 其选定方格后, 第四行只有唯一的放置



方法,所以总共有 $1+2\times 4+6=15$ (种)方法.

又第一行棋子有 $C_4^2=6$ (种)放置方法,其他 5 种情况同理,所以 $n(AB)=6\times 15=90$,

所以若每行都放置两枚棋子,则恰好每列都有两枚棋子的概率为 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{90}{1\ 296}=\frac{5}{72}$.

3. 必刷考点 ⊙ 对立事件、全概率公式

【解】(1) A 夺冠即为三轮比赛都获胜,所以 A 夺冠的概率为

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

由题意, $B\sim H$ 七名运动员水平相同,且八名运动员各自夺冠

关键点

概率之和为 1,所以 $B\sim H$ 七名运动员各自夺冠的概率均为

$$\frac{1}{7} \times \left(1 - \frac{8}{27}\right) = \frac{19}{189}.$$

(2) 记事件 B = “ B 获得冠军”,事件 A = “ B 与 A 对决过”,事件 A_i = “ B 与 A 在第 i 轮对决”, $i=1,2,3$.

不妨设 A 在①号位,则 B 在第 1,2,3 轮能与 A 对决时其位置编号分别为②,③④,⑤⑥⑦⑧.

$$P(A_1B) = \frac{1}{7} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{84},$$

$$P(A_2B) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{63},$$

$$P(A_3B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{189},$$

$$\text{所以 } P(AB) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B) = \frac{1}{84} + \frac{1}{63} + \frac{4}{189} = \frac{37}{756}.$$

(3) 记事件 C = “ B 与 C 对决过”.

B 没有与 A 对决过且最后获得冠军的概率 $P(\bar{A}B) = P(B) -$

$$P(AB) = \frac{19}{189} - \frac{37}{756} = \frac{39}{756}.$$

$$P(BC) = P((A+\bar{A})BC) = P(ABC) + P(\bar{A}BC) = P(AB)P(C|AB) + P(\bar{A}B)P(C|\bar{A}B).$$

由题意, $C\sim H$ 六名运动员与 B 对决过的概率相同, B 夺冠时

共与三名运动员对决,所以 $P(C|AB) = \frac{2}{6}, P(C|\bar{A}B) = \frac{3}{6}$,

$$\text{所以 } P(BC) = \frac{37}{756} \times \frac{2}{6} + \frac{39}{756} \times \frac{3}{6} = \frac{191}{4\ 536}.$$

真题风向练

4. $\frac{8}{27}$ $\frac{37}{64}$ **命题点** ⊙ 相互独立事件的概率、条件概率的求解

【解析】 设“三次都没取到黄球”为事件 A , “至少取到一次红球”为事件 B , 则 $P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

$$P(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

事件 A, B 同时发生意味着至少取到一次红球, 且剩余次数均取到白球,

$$\text{故 } P(AB) = C_3^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 + C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{37}{216}$$



(易错:若考虑对立面,不可以直接用 $1 - \left(\frac{3}{6}\right)^3$,还需要考虑

没取到黄球的概率),故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{37}{216}}{\frac{8}{27}} = \frac{37}{64}$.

第3节 离散型随机变量的分布列、数学期望与方差



题型上分练

1. D 【解析】由题意,得 $\frac{1}{2} + b + \frac{1}{4} = 1$ (提示:概率之和为1),

则 $b = \frac{1}{4}$, 故 $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + a \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1+a}{4}$, $E(X^2) = a^2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{a^2+1}{4}$,

所以 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2+1}{4} - \left(\frac{a+1}{4}\right)^2 = \frac{3a^2-2a+3}{16}$

(记忆: $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$), 故当 a 在 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 内增大时, $D(X)$ 减小; 当 a 在 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 内增大时, $D(X)$ 增大.

2. BC 【解析】依题意, $E(X^2) = 1^2 \cdot p + 2^2 \cdot (1-p) = p + 4(1-p) = 4 - 3p$ (提示:对应概率不变). 又 $E(X^2) = 2$, 所以 $4 - 3p = 2$, 解得 $p = \frac{2}{3}$, 故 A 错误, B 正确.

$E(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot (1-p) = 2 - p$, 将 $p = \frac{2}{3}$ 代入, 得 $E(X) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, 故 C 正确.

$D(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$, 故 D 错误.

3. 16 【解析】设随机变量 X 的取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 由题意, 得 $D(X) = 4$, 则 $D(2(X-2)) = 2^2 D(X) = 4 \times 4 = 16$ (提示:若 $Y = aX + b$ (a, b 为常数), 则 $D(Y) = a^2 D(X)$).

4. $\frac{8}{5}$ 【解析】设由 2 个并联元件组成的整体依次为系统 M_i ,

其损坏的元件个数为 $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, 可得

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(Y_i).$$

在电路系统正常工作的条件下, 可知系统 M_i 均正常工作, 对应概率 $P = 2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$, 则 $Y_i \in \{0, 1\}$, 可

得 $P(Y_i = 0) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{3}{5}$, $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = \frac{2}{5}$, 则

$$E(Y_i) = 0 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}, \text{ 所以 } E(X_4) = \sum_{i=1}^4 E(Y_i) =$$



$$4E(Y_i) = \frac{8}{5}.$$

一题多解 当电路系统正常工作时, 编号相同的元件损坏

1 个的概率为 $\frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times 2}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2}{5}$, 则 $X_n \sim B\left(n, \frac{2}{5}\right)$, 即 $X_4 \sim$

$B\left(4, \frac{2}{5}\right)$, 则 $E(X_4) = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.

5. $\frac{7}{12} \quad \frac{9}{5}$ 【解析】在第一个环节的提问中得到正确答案的概率

$$\text{率为 } \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

在第二个环节中答对的人数为 X , 则 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=3) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{9}{5}.$$

6. 【解】(1) 设“该同学投篮命中”为事件 M , “该同学选择 A 区域投篮”为事件 N_1 , “该同学选择 B 区域投篮”为事件 N_2 , “该同学选择 C 区域投篮”为事件 N_3 .

因为该同学等可能地选择三个区域中的一个区域投篮, 所以

$$P(N_1) = P(N_2) = P(N_3) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{则 } P(M|N_1) = \frac{2}{5}, P(M|N_2) = \frac{1}{4}, P(M|N_3) = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } P(M) = \sum_{i=1}^3 P(N_i)P(M|N_i) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{10} \text{ (提示: 全概率公式的应用),}$$

所以该同学投篮命中的概率为 $\frac{3}{10}$.

(2) 由题意可知, 得分 X 的所有可能取值为 0, 1, 3, 6,

$$\text{则 } P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{27}{80},$$

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{36}{80} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times$$



$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16},$$

$$P(X=6) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{80} = \frac{1}{40},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{27}{80} + 1 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{3}{16} + 6 \times \frac{1}{40} = \frac{93}{80},$$

所以该同学得分 X 的数学期望为 $\frac{93}{80}$.

7. 【解】(1) 设事件 A 为“甲通过面试”，事件 B 为“乙通过面试”，则 $P(A) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ (另解: $P(A) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$),

$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ (另解: } P(B) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{)}.$$

所以甲、乙两人有且只有一人通过面试的概率 $P = P(A\bar{B}) +$

$$P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = \frac{8}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{36}.$$

(2) 随机变量 X 的所有可能取值为 2, 3, 4,

$$\text{则 } P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, P(X=3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{故 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{17}{6}.$$

8. 【解】(1) m_2 的所有可能取值为 1, 2, 3,

$$P(m_2=1) = \frac{20}{20+15+15} = \frac{2}{5},$$

$$P(m_2=2) = \frac{15}{20+15+15} = \frac{3}{10},$$

$$P(m_2=3) = \frac{15}{20+15+15} = \frac{3}{10}, \text{ 故 } m_2 \text{ 的分布列为}$$

m_2	1	2	3
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } E(m_2) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10},$$

$$D(m_2) = \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{19}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(2 - \frac{19}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(3 - \frac{19}{10}\right)^2 = \frac{69}{100}.$$

$$(3) P(m_1+m_2+m_3 \geq 8) = P(m_1+m_2+m_3=8) + P(m_1+m_2+m_3=9),$$

关键点

$$P(m_1+m_2+m_3=8) = C_3^1 \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{81}{1000}, P(m_1+m_2+m_3=9) =$$



$$9) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{27}{1\,000},$$

$$\text{故 } P(m_1 + m_2 + m_3 \geq 8) = \frac{81}{1\,000} + \frac{27}{1\,000} = \frac{27}{250}.$$

9. 【解】(1) 设事件 A_1 = “球队甲主场与球队乙比赛获得的积分为 3 分”，

事件 A_2 = “球队甲主场与球队乙比赛获得的积分为 1 分”，

事件 A_3 = “球队甲主场与球队乙比赛获得的积分为 0 分”，

事件 B_1 = “球队甲客场与球队丙比赛获得的积分为 3 分”，

事件 B_2 = “球队甲客场与球队丙比赛获得的积分为 1 分”，

事件 B_3 = “球队甲客场与球队丙比赛获得的积分为 0 分”，

事件 C = “球队甲主场与球队乙比赛获得的积分超过客场与球队丙比赛获得的积分”，

$$P(A_1 B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, P(A_1 B_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9},$$

$$P(A_2 B_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$\text{则 } P(C) = P(A_1 B_2) + P(A_1 B_3) + P(A_2 B_3) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36},$$

所以球队甲主场与球队乙比赛获得的积分超过客场与球队丙比赛获得的积分的概率为 $\frac{13}{36}$.

(2) 由题意, 可知 Z 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 6,

$$P(Z=0) = P(A_3 B_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$P(Z=1) = P(A_2 B_3) + P(A_3 B_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

$$P(Z=2) = P(A_2 B_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$

$$P(Z=3) = P(A_1 B_3) + P(A_3 B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{36},$$

$$P(Z=4) = P(A_1 B_2) + P(A_2 B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{36},$$

$$P(Z=6) = P(A_1 B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

所以 Z 的分布列为

Z	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{3}$

$$\text{所以数学期望 } E(Z) = 0 \times \frac{1}{36} + 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{18} + 3 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{11}{36} + 6 \times \frac{1}{3} = 4.$$

10. 【解】(1) 设 A, B, C 三款模型通过算法设计评审分别为事件 M, N, T ; A, B, C 三款模型中恰有两款模型通过算法设计评审为事件 D , 则

$$P(D) = P(M\bar{N}\bar{T}) + P(\bar{M}NT) + P(M\bar{N}T) = \frac{3}{4} \times$$

$$\frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{13}{30} \quad (\text{提})$$



示:相互独立事件的概率公式).

(2) 设 A, B, C 三款模型中恰有一款模型通过算法设计评审为事件 E, 则 $P(E) = P(M\bar{N}\bar{T}) + P(\bar{M}\bar{N}T) + P(\bar{M}N\bar{T}) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{4}{5} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{20}$.

由条件概率公式可得 $P(M|E) = \frac{P(ME)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{3}$, 故所求概率为 $\frac{1}{3}$.

(3) 设 A, B, C 三款模型能成功上线分别为事件 Q, W, R, 则 $P(Q) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, $P(W) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, $P(R) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$.

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{12}{25}\right) = \frac{13}{100},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{12}{25}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{12}{25}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{12}{25} = \frac{19}{50},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{12}{25}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{12}{25} + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{12}{25} = \frac{37}{100},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{12}{25} = \frac{3}{25}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{13}{100}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{3}{25}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{13}{100} + 1 \times \frac{19}{50} + 2 \times \frac{37}{100} + 3 \times \frac{3}{25} = \frac{37}{25}.$$

11. 【解】(1) ① 记事件 A 是“当天处于安静环境”, 则 $\bar{A}$ 是“当天处于嘈杂环境”, 记事件 B 是“语音识别成功”.

$$\text{所以 } P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = 0.9 \times 0.3 + 0.6 \times 0.7 = 0.69.$$

② 已知测试结果为语音识别成功, 则当天处于安静环境的

$$\text{概率为 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.27}{0.69} = \frac{9}{23}.$$

(2) 设方案一和方案二测试次数分别为 X, Y.

方案一: 测试 4 次, 则 $E(X) = 4$.

方案二: Y 可取 3, 5,

$$P(Y=3) = 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.512,$$



$$P(Y=5) = 1 - 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.488,$$

故随机变量 Y 的分布列为

Y	3	5
P	0.512	0.488

$$\text{所以 } E(Y) = 3 \times 0.512 + 5 \times 0.488 = 3.976.$$

因为 $E(X) > E(Y)$, 即方案一测试次数的期望值大于方案二测试次数的期望值, 所以应选择方案二.

12. 【解】 (1) 设 A 同学答对的题数为 X , 则随机变量 X 的所有可能取值为 2, 3,

$$\text{则 } P(X=2) = \frac{C_3^2 C_1^1}{C_4^3} = \frac{3}{4}, P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_4^3} = \frac{1}{4}.$$

设 B 同学答对的题数为 Y , 则随机变量 Y 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(Y=0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

$$P(Y=1) = C_3^1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$P(Y=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64},$$

$$P(Y=3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

所以 A, B 两名同学恰好共答对 2 个问题的概率为 $P(X=$

$$2)P(Y=0) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{64} = \frac{3}{256}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } E(X) = 2 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{9}{64} + 2 \times \frac{27}{64} + 3 \times \frac{27}{64} = \frac{9}{4};$$

$$\text{而 } D(X) = \left(2 - \frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} + \left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

$$D(Y) = \left(0 - \frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{1}{64} + \left(1 - \frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{9}{64} + \left(2 - \frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{27}{64} + \left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 \times \frac{27}{64} = \frac{9}{16}.$$

因为 $E(X) = E(Y)$, $D(X) < D(Y)$, 所以应该选择 A 同学.

13. 【解】 设样本均值为 $\bar{t}$.

(1) 有放回的抽样会有 16 个等可能的样本, 如表所示:

$\bar{t}$	$t_{(1)} = 5$	$t_{(2)} = 6$	$t_{(3)} = 7$	$t_{(4)} = 8$
$t_{(1)} = 5$	5	5.5	6	6.5
$t_{(2)} = 6$	5.5	6	6.5	7
$t_{(3)} = 7$	6	6.5	7	7.5
$t_{(4)} = 8$	6.5	7	7.5	8

则样本均值的可能取值有 7 个, 可得 $P(\bar{t}=5) = \frac{1}{16}, P(\bar{t}=$



$$P(\bar{t}=5.5)=\frac{1}{8}, P(\bar{t}=6)=\frac{3}{16}, P(\bar{t}=6.5)=\frac{1}{4}, P(\bar{t}=7)=\frac{3}{16},$$

$$P(\bar{t}=7.5)=\frac{1}{8}, P(\bar{t}=8)=\frac{1}{16},$$

所以样本均值 $\bar{t}$ 的分布列为

$\bar{t}$	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} \text{则 } E(\bar{t}) &= 5 \times \frac{1}{16} + 5.5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{3}{16} + 6.5 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{3}{16} + 7.5 \times \frac{1}{8} + \\ &8 \times \frac{1}{16} = 6.5. \end{aligned}$$

(2) 无放回的抽样会有 12 个等可能的样本,

$\bar{t}$	$t_{(1)}=5$	$t_{(2)}=6$	$t_{(3)}=7$	$t_{(4)}=8$
$t_{(1)}=5$	——	5.5	6	6.5
$t_{(2)}=6$	5.5	——	6.5	7
$t_{(3)}=7$	6	6.5	——	7.5
$t_{(4)}=8$	6.5	7	7.5	——

$$\begin{aligned} \text{可得 } P(\bar{t}=5.5) &= \frac{1}{6}, P(\bar{t}=6) = \frac{1}{6}, P(\bar{t}=6.5) = \frac{1}{3}, P(\bar{t}= \\ 7) &= \frac{1}{6}, P(\bar{t}=7.5) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

所以样本均值 $\bar{t}$ 的分布列为

$\bar{t}$	5.5	6	6.5	7	7.5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{所以样本均值超过总体均值的概率为 } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} < 0.5,$$

所以样本均值超过总体均值的概率不会大于 0.5.

(3) 样本均值与总体均值的误差不超过 0.5 的概率为 $P(6 \leq \bar{t} \leq 7)$,

$$\text{若采用有放回的抽样, 则 } P(6 \leq \bar{t} \leq 7) = \frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{5}{8};$$

$$\text{若采用无放回的抽样, 则 } P(6 \leq \bar{t} \leq 7) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

因为 $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$, 故采用无放回的抽样方法概率更大.



综合提分练

1. 必刷考点 ② 离散型随机变量的分布列、数学期望

【解】(1) 甲连续打前四局比赛, 说明甲在前三局都获胜, 第一局: 甲、乙对打, 甲胜, 概率为 $\frac{2}{3}$;

第二局: 甲、丙对打, 甲胜, 概率为 $\frac{2}{3}$;



第三局：甲、乙对打，甲胜，概率为 $\frac{2}{3}$ 。

所以甲连续打前四局比赛的概率 $P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ 。

(2) 设事件 A ：前四局中第二局乙获胜，事件 B ：前四局中甲轮空两局。

前四局中第二局乙获胜，即第一局甲、乙对打，乙胜，概率为

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

第二局乙、丙对打，乙胜，概率为 $\frac{1}{2}$ ，所以 $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 。

在第二局乙获胜的前提下，甲轮空两局，则甲第二局和第四局轮空，

所以第三局乙、甲对打，乙胜，概率为 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ；第四局乙、丙对打，概率为 1，

$$\text{故 } P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{18}, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3},$$

即所求概率为 $\frac{1}{3}$ 。

(3) 由题意知，甲的得分 X 的所有可能取值为 0, 2, 4, 6，

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(X=4) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27},$$

$$P(X=6) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	2	4	6
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 4 \times \frac{4}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = \frac{88}{27}.$$

2. 必刷考点 ⊙ 离散型随机变量的分布列及数学期望、决策问题

【解】(1) 设事件 A 表示“该小组比赛胜利”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{59}{60}.$$

(2) 由题意可知， X 的所有可能取值为 1, 2, 3，

$$\text{则 } P(X=1) = p_1, P(X=2) = (1-p_1)p_2,$$

$$P(X=3) = (1-p_1)(1-p_2),$$

所以 X 的分布列为



X	1	2	3
P	p_1	$(1-p_1)p_2$	$(1-p_1)(1-p_2)$

所以 $E(X) = p_1 + 2(1-p_1)p_2 + 3(1-p_1)(1-p_2) = p_1p_2 - 2p_1 - p_2 + 3$.

(3) 若依次派甲、乙、丙进行闯关, 设派出人员数目的期望为 E_1 , 由(2)可知, $E_1 = p_1p_2 - 2p_1 - p_2 + 3$.

若依次派甲、丙、乙进行闯关, 设派出人员数目的期望为 E_2 , 则 $E_2 = p_1p_3 - 2p_1 - p_3 + 3$.

从而 $E_1 - E_2 = p_1p_2 - 2p_1 - p_2 + 3 - (p_1p_3 - 2p_1 - p_3 + 3) = p_1p_2 - p_1p_3 - p_2 + p_3 = p_2(p_1 - 1) - p_3(p_1 - 1) = (p_1 - 1)(p_2 - p_3)$.

因为 $1 > p_1 > p_2 > p_3$, 所以 $p_1 - 1 < 0$, $p_2 - p_3 > 0$, 所以 $E_1 - E_2 < 0$, 即 $E_1 < E_2$, 所以要使得派出人员数目的期望较小, 应先派出乙.

3. 必刷考点 ⊙ 对立事件、相互独立事件、离散型随机变量的分布列及数学期望

【解】(1) 记“玩家购买 3 个甲系列盲盒, 只收集到 1 款玩具车”为事件 A , “玩家购买 3 个甲系列盲盒, 收集到至少 2 款不同玩具车”为事件 B , 则 $P(A) = \frac{C_6^1}{6^3} = \frac{1}{36}$, $P(B) = 1 - P(A) =$

$$1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

(2) ①依题意, 两人交换的恰好都是玩具车或者都是玩偶, 则

$$\text{所求概率 } P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

②依题意, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$X=0$ 即两次交换中, 小王家取出的都是玩具车, 小李家取出的都是玩偶, 则 $P(X=0) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

$X=1$ 包括两种情况:

a. 第一次交换后小王家有 2 款玩具车 2 款玩偶, 第二次交换后小王家有 1 款玩具车 3 款玩偶;

b. 第一次交换后小王家有 1 款玩具车 3 款玩偶, 第二次交换后小王家仍有 1 款玩具车 3 款玩偶,

$$\text{因此 } P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{32}.$$

$X=2$ 包括三种情况:

a. 第一次交换后小王家有 2 款玩具车 2 款玩偶, 第二次交换后小王家仍有 2 款玩具车 2 款玩偶;

b. 第一次交换后小王家有 1 款玩具车 3 款玩偶, 第二次交换后小王家有 2 款玩具车 2 款玩偶;

c. 第一次交换后小王家有 3 款玩具车 1 款玩偶, 第二次交换后小王家有 2 款玩具车 2 款玩偶, 因此 $P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} +$

$$\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{17}{32}.$$

$X=4$ 即两次交换中, 小王家取出的都是玩偶, 小李家取出的

都是玩具车, 则 $P(X=4) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

故 $P(X=3) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{7}{32} - \frac{17}{32} - \frac{1}{64} = \frac{7}{32}$.

所以所求分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{64}$

所以数学期望 $E(X) = \frac{1}{64} \times 0 + \frac{7}{32} \times 1 + \frac{17}{32} \times 2 + \frac{7}{32} \times 3 + \frac{1}{64} \times 4 = 2$.

真题风向练

4. 命题点 ④ 离散型随机变量的分布列、条件概率

(1) 【解】第一步: 求出随机变量 X 的所有可能取值.

当 $N=4, p=\frac{1}{3}$ 时, 依题意, 该同学停止练习的情况有: 投中 1 次; 4 次均未投中. 因此, 该同学停止练习时的投篮次数 X 的可能取值为 1, 2, 3, 4. 2 分

第二步: 分别求出 $X=1, 2, 3, 4$ 时的概率, 并写出分布列.

当 $X=1$ 时, 该同学第 1 次投中, 概率为 $P(X=1) = p = \frac{1}{3}$;

当 $X=2$ 时, 该同学第 1 次未投中, 且第 2 次投中, 概率为

$$P(X=2) = (1-p)p = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9};$$

当 $X=3$ 时, 该同学前 2 次均未投中, 且第 3 次投中, 概率为

$$P(X=3) = (1-p)^2 p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27};$$

当 $X=4$ 时, 该同学前 3 次均未投中, 概率为 $P(X=4) = (1-p)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ (易错: 第 4 次无论投中与否都会停止练习).

..... 4 分

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

..... 5 分

(2) (i) 【解】第一步: 求出 $k=0$ 时, $P(X>k)$ 的值.

当 $k=0$ 时, $P(X>k) = P(X>0) = 1$ 6 分

第二步: 当 $1 \leq k \leq N-1$ 时, 结合相互独立事件的概率公式求出 $P(X>k)$.

当 $1 \leq k \leq N-1$ 时, 因为所求概率对应的事件为该同学停止练习时的投篮次数大于 k , 且该同学前 k 次均未投中不会因投篮次数达上限而被强制停止练习, 所以 $P(X>k) = (1-p)^k$.

..... 9 分

又 $k=0$ 时, 符合上式, 故当 $k \leq N-1$ 时, $P(X>k) = (1-p)^k$.

..... 10 分

(ii) 【证明】第一步: 根据 $k+m \geq k$, 表示出 $P(X>k+m|X>k)$.



由于 m 是自然数, 则 $k+m \geq k$, 故 $\{X|X>k+m\} \cap \{X|X>k\} = \{X|X>k+m\}$, 因此由条件概率公式得 $P(X>k+m|X>k) = \frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}$.

..... 12 分

第二步: 结合 (i) 的结论证得 $P(X>k+m|X>k) = P(X>m)$.

由 (i) 可知, 当 $k+m \leq N-1$ 时, $P(X>k+m) = (1-p)^{k+m}$, $P(X>k) = (1-p)^k$, 所以 $P(X>k+m|X>k) = \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m$.

易知 $P(X>m) = (1-p)^m$, 所以 $P(X>k+m|X>k) = P(X>m)$.

..... 15 分

一题多解 (2) (i) 第一步: 求出 $k=0$ 时, $P(X>k)$ 的值.

当 $k=0$ 时, $P(X>k) = P(X>0) = 1$ 6 分

第二步: 求出 $1 \leq k \leq N-1$ 时, $P(X=k)$ 的值, 进而求出 $P(X>k)$ 的值.

当 $1 \leq k \leq N-1$ 时, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ (易错: 由于 $1 \leq k \leq N-1$, 故 $X=k$ 所对应的事件只能是前 $(k-1)$ 次均未投中, 第 k 次投中). 7 分

$P(X>k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - [P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \cdots + P(X=k)] = 1 - [p + p \cdot (1-p) + p(1-p)^2 + \cdots + p \cdot (1-p)^{k-1}] = 1 - p \cdot [1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{k-1}] = 1 - p \cdot \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k$ (关键: 利用对立事件概率和为 1 的性质及等比数列求和公式求解). 9 分

当 $k=0$ 时, 也符合上式, 故当 $k \leq N-1$ 时, $P(X>k) = (1-p)^k$ 10 分

第 4 节 超几何分布、二项分布与正态分布



题型上分练

1. BCD 【解析】由题意, 随机变量 X 服从超几何分布, 即 $X \sim$

$H(5, 3, 3)$, $P(X=k) = \frac{C_3^k C_2^{3-k}}{C_5^3}$, $k=1, 2, 3$, 故 A 错误;

根据超几何分布的方差的计算公式得 $D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot$

$\left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$, 所以 $D(X) = 3 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{2}{4} = \frac{9}{25}$, 故 B

正确;

根据全概率公式得 $P(Y_2=1) = P(Y_2=1|Y_1=1)P(Y_1=1) +$

$P(Y_2=1|Y_1=0)P(Y_1=0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$, 故 C 正确;

根据条件概率可得 $P(Y_1=1|Y_2=1) = \frac{P(Y_1=1, Y_2=1)}{P(Y_2=1)} =$

$\frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

2. $\frac{3}{4}$ 【解析】 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 且随机变量 X 服从



超几何分布.

$$P(X=0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

3. 【解】(1) 依题意, 这 2 名医生都来自 A 科室或都来自 B 科室, 则有 $C_2^2 C_6^2 + C_3^2 C_6^2$ 种情况, 从 11 人中抽 4 人有 C_{11}^4 种情况,

$$\text{所以所求概率为 } \frac{C_2^2 C_6^2 + C_3^2 C_6^2}{C_{11}^4} = \frac{60}{330} = \frac{2}{11}.$$

(2) 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$$P(X=0) = \frac{C_5^0 C_6^4}{C_{11}^4} = \frac{1}{22}, P(X=1) = \frac{C_5^1 C_6^3}{C_{11}^4} = \frac{10}{33},$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_6^2}{C_{11}^4} = \frac{5}{11}, P(X=3) = \frac{C_5^3 C_6^1}{C_{11}^4} = \frac{2}{11},$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^4 C_6^0}{C_{11}^4} = \frac{1}{66},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{22}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{66}$

$$\text{所以数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{22} + 1 \times \frac{10}{33} + 2 \times \frac{5}{11} + 3 \times \frac{2}{11} + 4 \times \frac{1}{66} = \frac{20}{11}.$$

4. 【解】(1) X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{所以数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

(2) 用 B 表示事件“在第二次抽选的 2 名教师中, 有校本课程开设经验的教师人数是 1”,

用 $A_i (i=0, 1, 2)$ 表示事件“第一次抽选的 2 名教师中, 有校本课程开设经验的教师人数是 i ”, 则 A_0, A_1, A_2 两两互斥, $\sum_{i=0}^2 A_i = \Omega$.



由(1)知 $P(A_0) = \frac{3}{10}, P(A_1) = \frac{3}{5}, P(A_2) = \frac{1}{10}$.

由全概率公式, 得 $P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{3}{10} \times \frac{C_4^1 C_1^1}{C_5^2} +$

$\frac{3}{5} \times \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} + \frac{1}{10} \times \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{27}{50}$, 所以“在第二次抽选的 2 名教师

中, 有校本课程开设经验的教师人数是 1”的概率为 $\frac{27}{50}$.

5. 【解】(1) 事件 A 与 B 不相互独立, 理由如下:

当 $n=6$ 时, 由题可得 $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{6}{20} \times \frac{5}{19} + \frac{14}{20} \times$

$\frac{6}{19} = \frac{114}{380} = \frac{3}{10}, P(AB) = \frac{6}{20} \times \frac{5}{19} = \frac{30}{380} = \frac{3}{38},$

所以 $P(A)P(B) = \frac{9}{100} \neq P(AB)$, 所以事件 A 与 B 不相互独立

(提示: 根据相互独立事件的定义判断).

(2) 由题可得从 20 个球中取 10 个球, 恰有 3 个白球的概率

$$P_n = \frac{C_n^3 C_{20-n}^7}{C_{20}^{10}} (3 \leq n \leq 13),$$

$$\text{则 } \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{C_{n+1}^3 C_{19-n}^7}{C_n^3 C_{20-n}^7} = \frac{\frac{(n+1)!}{3! (n-2)!} \times \frac{(19-n)!}{7! (12-n)!}}{\frac{n!}{3! (n-3)!} \times \frac{(20-n)!}{7! (13-n)!}} = \frac{-n^2 + 12n + 13}{-n^2 + 22n - 40}$$

($3 \leq n \leq 12$).

又 $(-n^2 + 12n + 13) - (-n^2 + 22n - 40) = 53 - 10n$, 所以当 $3 \leq n \leq 5$

关键点

时, $\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$, 当 $6 \leq n \leq 12$ 时, $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$, 所以 $P_3 < P_4 < P_5 < P_6 > P_7 >$

$P_8 > P_9 > P_{10} > P_{11} > P_{12} > P_{13}$,

所以当 $n=6$ 时, 参与者获奖的可能性最大.

6. B 【解析】 每次摸到红球的概率都为 $\frac{1}{3}$, 则摸球 3 次, 恰有 1

次摸到红球的概率是 $C_3^1 \cdot \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

7. ACD 【解析】 从袋子中有放回地取球 4 次, 则每次取球互不影响, 并且每次取到黑球的概率相等. 又每次取 1 个球, 取到白球记 0 分, 取到黑球记 1 分, 故 4 次取球的总分数等于取到黑球的总个数.

每次取出黑球的概率为 $\frac{2}{3}$, 因为是有放回地取 4 次球, 所以

$X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right)$, 故 **A** 正确;

$P(X=2) = C_4^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$, 故 **B** 错误;

根据二项分布数学期望公式, 得 $E(X) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, 故 **C** 正确;

根据二项分布方差公式, 得 $D(X) = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$, 故 **D** 正

确. 故选 ACD.



刷有所得 若随机变量 X 服从二项分布, 则记作 $X \sim B(n, p)$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, 且有 $E(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$.

8. A 【解析】因为 $X \sim B(n, 0.8)$, 所以 $P_k = P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$, 若 P_k 是唯一的最大值, 则 $\begin{cases} P_k > P_{k-1}, \\ P_k > P_{k+1}, \end{cases}$ 所

$$\text{以} \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} > C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)}, \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} > C_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}, \end{cases} \text{解得} \frac{k-p}{p} < n < \frac{k+1-p}{p}.$$

因为 $k=7, p=0.8$, 所以 $7.75 < n < 9$.

因为 $n \in \mathbf{N}$, 所以 $n=8$, 所以 $D(X) = np(1-p) = 8 \times 0.8 \times (1-0.8) = 1.28$ (记忆: 二项分布中, $D(X) = np(1-p)$). 故选 A.

9. $\frac{4}{81} - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ 【解析】若比赛 4 轮甲获胜, 则第 1, 2 轮两队各胜 1 轮, 第 3, 4 轮甲获胜, 所以比赛 4 轮甲获胜的概率为

$$C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}.$$

若比赛结束所需的总对决轮数为 $2n$, 不管最终哪个队获胜,

关键点

前 $(2n-2)$ 轮, 每 2 轮每队获胜 1 轮, 最后 2 轮是同一个队获胜,

$$\text{所以 } P_{2n} = \left(C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

10. 【解】 (1) 由题意得随机检测 1 件该零件合格的概率是 $\frac{5}{6} \times$

$$\frac{9}{10} = \frac{3}{4},$$

则检测 3 件该零件, 至少有 2 件合格的概率是 $C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times$

$$\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{32} \text{ (提示: 符合二项分布)}.$$

(2) 由题意, 可知 X 的所有可能取值为 $-80, -50, -20, 10, 40$, 则

$$P(X=-80) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^4 = \frac{1}{256},$$

$$P(X=-50) = C_4^3 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{256} = \frac{3}{64},$$

$$P(X=-20) = C_4^2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{54}{256} = \frac{27}{128},$$

$$P(X=10) = C_4^1 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{108}{256} = \frac{27}{64},$$

$$P(X=40) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256},$$

则 X 的分布列为

X	-80	-50	-20	10	40
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

故数学期望 $E(X) = -80 \times \frac{1}{256} - 50 \times \frac{3}{64} - 20 \times \frac{27}{128} + 10 \times \frac{27}{64} +$



$$40 \times \frac{81}{256} = 10 (\text{元}).$$

11. 【解】(1) 根据题意, $X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right)$, X 的可能取值有 0, 1, 2, 3, 4,

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81},$$

$$P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

$$P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81},$$

$$P(X=4) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

$$\text{所以数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{81} + 1 \times \frac{8}{81} + 2 \times \frac{8}{27} + 3 \times \frac{32}{81} + 4 \times \frac{16}{81} = \frac{8}{3}.$$

(2) 由(1)知, 当 $k=3$ 时概率最大.

一题多解

(1) 根据题意, $X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right)$, 所以数学期望

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$(2) \text{ 由题意, 得 } P(X=k) = C_4^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k},$$

$$\text{则 } \begin{cases} C_4^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k} \geq C_4^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}, \\ C_4^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k} \geq C_4^{k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}, \end{cases}$$

$$\text{化简得 } \begin{cases} C_4^k \times \frac{2}{3} \geq C_4^{k-1} \times \frac{1}{3}, \\ C_4^k \times \frac{1}{3} \geq C_4^{k+1} \times \frac{2}{3}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2 \times \frac{4!}{k! (4-k)!} \geq \frac{4!}{(k-1)! (5-k)!}, \\ \frac{4!}{k! (4-k)!} \geq 2 \times \frac{4!}{(k+1)! (3-k)!}, \end{cases} \quad \text{则 } \begin{cases} 2 \times \frac{1}{k} \geq \frac{1}{5-k}, \\ \frac{1}{4-k} \geq 2 \times \frac{1}{k+1}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{7}{3} \leq k \leq \frac{10}{3}.$$

又由于 $k \in \mathbf{N}^*$, 故 $k=3$.

刷有所得 若 $P(X=k) \geq P(X=k-1)$ 且 $P(X=k) \geq P(X=k+1)$, 则可以保证 $P(X=k)$ 为其最大值. 这种方法在数列中也同样适用, 即考虑 $a_n \geq a_{n+1}$ 且 $a_n \geq a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 则 a_n 为此数列的最大项.



12. 【解】(1) 设事件 $A_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示第 i 次抽到春季卡, $B_j (j=1, 2, 3, 4)$ 表示第 j 次抽到夏季卡, 事件 C 表示抽 3 次即获奖, 则 $P(C) = P(B_1 B_2 B_3) = P(B_1) P(B_2 | B_1) P(B_3 | B_1 B_2) = \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

(2) 设事件 D 表示获奖, 则 $D = (B_1 B_2 B_3) \cup (A_1 B_2 B_3 B_4) \cup (B_1 A_2 B_3 B_4) \cup (B_1 B_2 A_3 B_4)$,

且 $B_1 B_2 B_3, A_1 B_2 B_3 B_4, B_1 A_2 B_3 B_4, B_1 B_2 A_3 B_4$ 为互斥事件,

所以 $P(D) = P(B_1 B_2 B_3) + P(A_1 B_2 B_3 B_4) + P(B_1 A_2 B_3 B_4) + P(B_1 B_2 A_3 B_4)$.

$$P(A_1 B_2 B_3 B_4) = \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} \times \frac{C_1^1}{C_3^1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72},$$

$$P(B_1 A_2 B_3 B_4) = \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_4^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} \times \frac{C_1^1}{C_3^1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{54},$$

$$P(B_1 B_2 A_3 B_4) = \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_5^1}{C_4^1} \times \frac{C_1^1}{C_3^1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216},$$

由(1)知 $P(B_1 B_2 B_3) = \frac{1}{36}$,

$$\text{所以 } P(D) = \frac{1}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{54} + \frac{5}{216} = \frac{1}{12}.$$

因为参加抽奖是否获奖相互独立, 用随机变量 X 表示参加活动获奖的人数, 所以若促销的 30 天中预计有 360 人参加活动, 则 $X \sim B\left(360, \frac{1}{12}\right)$, 所以 $E(X) = 360 \times \frac{1}{12} = 30$, 即估计获奖人数的均值为 30.

又因为获奖后每人获得两套二十四节气书签, $30 \times 2 = 60$ (套), 所以商家准备 60 套书签作为奖品较为合理.

13. 【解】(1) 设移动 3 次后, 质点最终所在的位置的坐标为 1 为事件 A , 由题可知事件 A 发生等价于 3 次移动中, 2 次向右

关键点

移动, 1 次向左移动, $\therefore P(A) = C_3^2 p^2 (1-p) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

(2) 根据题意, X 可取 4, 2, 0, -2, -4,

$$\text{则 } P(X=4) = p^4, P(X=2) = C_4^3 p^3 (1-p) = 4p^3 (1-p),$$

$$P(X=0) = C_4^2 p^2 (1-p)^2 = 6p^2 (1-p)^2,$$

$$P(X=-2) = C_4^3 p (1-p)^3 = 4p (1-p)^3,$$

$$P(X=-4) = (1-p)^4,$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	4	2	0	-2	-4
P	p^4	$4p^3(1-p)$	$6p^2(1-p)^2$	$4p(1-p)^3$	$(1-p)^4$

$\therefore$ 数学期望 $E(X) = 4 \times p^4 + 2 \times 4p^3(1-p) + 0 \times 6p^2(1-p)^2 + (-2) \times 4p(1-p)^3 + (-4) \times (1-p)^4 = 8p - 4$.

(3) 设在移动 n 次中, 向右移动的次数为 Y , 则 $Y \sim B(n, p)$,

$$\therefore E(Y) = np.$$

$\therefore$ 向右移动的次数为 Y , 则向左移动 $(n-Y)$ 次, $\therefore$ 质点最终



所在位置的坐标 $X=Y-(n-Y)=2Y-n$, $\therefore E(X)=E(2Y-n)=2E(Y)-n=2np-n$ (提示: 若 $Y=aX+b$, 则 $E(Y)=aE(X)+b$), 即随机变量 X 的数学期望为 $2np-n$.

14. C 【解析】因为随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$, 所以正态曲线关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $P(X < 1) = 0.5$, 且 $P(X \geq 3) = P(X \leq -1) = 0.2$, 所以 $P(-1 < X < 1) = P(X < 1) - P(X \leq -1) = 0.5 - 0.2 = 0.3$. 故选 C.

15. C 【解析】随机变量 X 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 因为 $P(X \leq a) = 0.3$, $P(a \leq X \leq a+2) = 0.4$, 则 $P(X \geq a+2) = 0.3$, 所以 $a, a+2$ 关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $a+a+2=2 \times 1$, 解得 $a=0$. 故选 C.

16. D 【解析】因为产品质量指标服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$, $P(|X-\mu| < 3\sigma) \approx 0.9973$, 且质量指标介于 96 至 104 之间的产品为良品, 良品率达到 99.73%, 所以 $100-3\sigma \geq 96$, $100+3\sigma \leq 104$, 解得 $\sigma \leq \frac{4}{3}$, 所以 σ 不超过 $\frac{4}{3}$. 故选 D.

17. ABD 【解析】随机变量 X 服从正态分布 $N(6, 4)$, 所以 $E(X) = 6, D(X) = 4$.

对于 A, 由正态分布的对称性, 可得 $P(7 < X < 9) = P(3 < X < 5)$, 故 A 正确;

对于 B, $E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2 \times 6 + 1 = 13$, 故 B 正确;

对于 C, $D(2X+1) = 4D(X) = 4 \times 4 = 16$, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $P(2 < X < 10) = m, P(4 < X < 8) = n$, 所以 $P(2 < X \leq 4) = \frac{m-n}{2}$, 所以 $P(4 < X < 10) = P(2 < X < 10) - P(2 < X \leq 4) = m - \frac{m-n}{2} = \frac{m+n}{2}$, 故 D 正确.

18. D 【解析】已知 $P\left(\frac{H-172.0}{14.5} \leq -1.28\right) \approx 0.10$,

则 $P\left(\frac{H-172.0}{14.5} \geq 1.28\right) \approx 0.10$, 由 $\frac{H-172.0}{14.5} \geq 1.28$, 解得 $H \geq 190.56$, 即“过高”等级中的最矮株高可能为 190.6 cm. 故选 D.

19. D 【解析】由题可知 $\mu = 100, \sigma = 16$, 作出正态分布密度曲线 (图略), 易知 $P(84 \leq X \leq 132) = \frac{P(84 \leq X \leq 116) + P(68 \leq X \leq 132)}{2} \approx \frac{0.6827 + 0.9545}{2} = 0.8186$. 故 200 天中团购券的核销量在 84 到 132 张的天数大约是 $200 \times 0.8186 = 163.72 \approx 164$. 故选 D.

20. ACD 【解析】对于正态分布 $X \sim N(3, 1)$, 有 $E(X) = 3, D(X) = 1$; 对于二项分布 $Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$, 有 $E(Y) = 6 \times \frac{1}{2} = 3, D(Y) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. 故 A 正确, B 错误.

根据正态曲线的对称性可知, 若 $X \sim N(3, 1)$, 则 $P(X \leq 1) = P(X \geq 5)$, 故 C 正确.

对于二项分布 $Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$, $P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$



$1) = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{64}$, $P(Y \geq 5) = P(Y=5) + P(Y=6) = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^0 = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{64}$, 故 **D** 正确. 故选 ACD.

21. $\frac{1}{3}$ 【解析】设 $P(6 < X < 8) = x$, 因为 $X \sim N(8, \sigma^2)$, 则 $P(X < 10) = P(X > 6) = x + \frac{1}{2}$, 所以 $2P(X > 6) + P(X < 10) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$, 解得 $x = \frac{1}{3}$, 故 $P(6 < X < 8) = \frac{1}{3}$.

22. 【解】(1) 设这 50 件车载电池的电量误差的平均数为 $\bar{x}$.

由题意得 $\bar{x} = \frac{30 \times 0.2 + 20 \times (-0.3)}{50} = 0$, 则 $\mu = 0$.

而 $\sqrt{3.19} \approx 1.79$, 所以当 $X \in (-\sigma + \mu, \sigma + \mu)$ 时, 车载电池为特等品, 故特等品的概率为 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$, 故 A, B 两条生产线生产的 10 000 件车载电池中特等品的件数约为 $10\,000 \times 0.6827 = 6\,827$.

(2) 由题意得 $X \sim B\left(4, \frac{3}{5}\right)$,

$$P(X=0) = C_4^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625},$$

$$P(X=1) = C_4^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{96}{625},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625},$$

$$P(X=3) = C_4^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{216}{625},$$

$$P(X=4) = C_4^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{81}{625},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}.$$

真题风向练

23. BC 命题点 ⊙ 正态分布

【解析】由题可得 $X \sim N(1.8, 0.1^2)$, $Y \sim N(2.1, 0.1^2)$, 所以 $P(X > 2) = P(X > \mu + 2\sigma) < P(X > \mu + \sigma) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 < 0.2$, 故 **A** 错误, **B** 正确;

$P(Y > 2) = P(Y > \mu_1 - \sigma_1) \approx 0.8413 > 0.5$, 故 **C** 正确, **D** 错误.

24. 命题点 ⊙ 频率分布直方图、百分位数、中位数、利用频率估计概率、二项分布的期望和方差

【解】(1) 第一步: 判断第一四分位数和中位数所在区间.

因为首次出现故障时间在 365 天以内的电子产品所占比例



为 $5\% + 10\% = 15\%$,

在 375 天以内的电子产品所占比例为 $15\% + 20\% = 35\%$, 在

385 天以内的电子产品所占比例为 $35\% + 25\% = 60\%$,

所以第一四分位数, 即 25% 分位数一定位于 $(365, 375)$ 内,

中位数一定位于 $(375, 385)$ 内. 2 分

第二步: 求第一四分位数.

设第一四分位数为 x , 则 $0.02(x - 365) + 0.15 = 0.25$,

解得 $x = 370$, 即第一四分位数为 370. 4 分

第三步: 求中位数.

设中位数为 m , 则 $0.025(m - 375) + 0.35 = 0.5$, 解得 $m =$

381, 即中位数为 381. 6 分

(2)(i) 根据题中频率分布直方图求 $\hat{p}$.

$\hat{p} = (0.005 + 0.01) \times 10 = 0.15$ 8 分

(ii) 根据二项分布的期望与方差公式求解.

由(i)知 $X \sim B(100, 0.15)$, 则 $E(X) = 100 \times 0.15 = 15$,

..... 10 分

$D(X) = 100 \times 0.15 \times (1 - 0.15) = 12.75$ 13 分

第 5 节 随机抽样与用样本估计总体



题型上分练

- 1. C** 【解析】从表中第 5 行第 6 列开始向右读取数据为 253, 313, 457(舍), 860(舍), 736(舍), 253(舍), 007, 所以第 3 个样本编号为 007. 故选 C.

- 2. D** 【解析】由题意, 得
$$\begin{cases} \frac{m}{n} = \frac{600}{200}, \\ \frac{72m + nx}{m + n} = 74, \end{cases}$$
 解得 $x = 80$. 故选 D.

- 3. AB** 【解析】对于 A, 从高二年级学生 500 人中抽取 15 人, 由于总体数量比较少, 可采用简单随机抽样的方法, 故 A 正确; 对于 B, C, 根据题意知抽样比为 $\frac{15}{500} = \frac{3}{100}$, 所以高一年级应抽

关键点

取 $400 \times \frac{3}{100} = 12$ (人), 高三年级应抽取 $300 \times \frac{3}{100} = 9$ (人), 故样本容量 $n = 12 + 15 + 9 = 36$, 故 B 正确, C 错误;

对于 D, 在分层随机抽样中, 每个个体被抽到的概率是相等的, 故 D 错误. 故选 AB.

- 4. 46.2** 【解析】依题意, 在容量为 50 的样本中, 男生人数为 $\frac{300}{500} \times 50 = 30$, 女生人数为 20, 所有样本的方差为 $s^2 = \frac{30}{50} \times [17 + (170 - 166)^2] + \frac{20}{50} \times [30 + (160 - 166)^2] = \frac{231}{5} = 46.2$ (cm²).

- 5. BCD** 【解析】由图表可知, 3 月的地方一般公共预算收入为 $66.57 - 43.88 = 22.69$ (亿元), 4 月的地方一般公共预算收入为 $83.96 - 66.57 = 17.39$ (亿元), 故 A 错误.

2025 年 9 月该地区的地方一般公共预算收入为 $191.67 - 161.05 = 30.62$ (亿元), 故 B 正确.

2025 年 9 月该地区的地方一般公共预算收入累计同比增长

4.2%,所以2024年9月该地区的地方一般公共预算收入累计值为 $191.67 \div (1+4.2\%) \approx 183.94$ (亿元),2025年8月该地区的地方一般公共预算收入累计同比增长-0.3%,所以2024年8月该地区的地方一般公共预算收入累计值为 $161.05 \div (1-0.3\%) \approx 161.53$ (亿元),所以2024年9月该地区的地方一般公共预算收入约为 $183.94-161.53=22.41$ (亿元),故C正确.

2025年10月该地区的地方一般公共预算收入累计同比增长4.8%,所以2024年10月该地区的地方一般公共预算收入累计值为 $213.39 \div (1+4.8\%) \approx 203.62$ (亿元),所以2024年前10个月,该地区地方一般公共预算收入平均数约为 $203.62 \div 10=20.362$,故D正确. 故选BCD.

6. D 【解析】对于A,芯片、软件行业从事技术岗位的“90后”人数占比为 $55\% \times 37\% = 20.35\%$,芯片、软件行业从业者中“80后”占总人数的40%,但不知道其中从事技术岗位的人数的比例,故无法比较,故A错误;

对于B,由图①知芯片、软件行业从业者中,“90后”占比为55%,超过50%,故B错误;

对于C,芯片、软件行业中从事技术和设计岗位的“90后”人数占从事这两个行业总人数的 $55\% \times (37\% + 13\%) = 27.5\%$,没有超过从事这两个行业总人数的30%,故C错误;

对于D,芯片、软件行业中,“90后”从事市场岗位的人数占比为 $55\% \times 14\% = 7.7\%$,因为 $7.7\% > 5\%$,所以芯片、软件行业中,“90后”从事市场岗位的人数比“80前”从事芯片、软件行业的总人数多,故D正确.

7. ACD 【解析】对于A,题图②中5月份有AQI值超过200的异常值,故A正确;

对于B,C,题图②中5月份的箱体高度比6月份的箱体高度小,说明5月的AQI值比6月的AQI值集中,故B错误,C正确;

对于D,虽然5月有严重污染天气,但从题图②中可知5月份箱体整体上比6月份箱体偏下且箱体高度小,AQI值整体集中于较小值,说明从整体上看,该地区2023年5月的空气质量略好于6月,故D正确. 故选ACD.

8. ABD 【解析】将甲的得分从小到大排列为7.0,8.3,8.9,

8.9,9.2,9.3,所以甲得分的中位数为 $\frac{8.9+8.9}{2}=8.9$,

将乙的得分从小到大排列为8.1,8.5,8.6,8.6,8.7,9.1,所以乙得分的中位数为 $\frac{8.6+8.6}{2}=8.6 < 8.9$,故A正确.

甲得分的极差为 $9.3-7.0=2.3$,乙得分的极差为 $9.1-8.1=1 < 2.3$,故B正确.

$6 \times 75\% = 4.5$,向上取整为5,所以甲得分的上四分位数是9.2,乙得分的上四分位数是8.7, $9.2 > 8.7$,故C错误.

甲得分的平均数 $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{7.0+9.3+8.3+9.2+8.9+8.9}{6} = \frac{51.6}{6} = 8.6$,



$$\begin{aligned}
 \text{甲得分的方差 } s_{\text{甲}}^2 &= \frac{1}{6} \times [(7.0-8.6)^2 + (9.3-8.6)^2 + \\
 &+ (8.3-8.6)^2 + (9.2-8.6)^2 + (8.9-8.6)^2 + (8.9-8.6)^2] \\
 &= \frac{1}{6} \times [(-1.6)^2 + 0.7^2 + (-0.3)^2 + 0.6^2 + 0.3^2 + 0.3^2] \\
 &= \frac{1}{6} \times (2.56 + 0.49 + 0.09 + 0.36 + 0.09 + 0.09) \\
 &= \frac{3.68}{6} \approx 0.61.
 \end{aligned}$$

$$\text{乙得分的平均数 } \bar{x}_{\text{乙}} = \frac{8.1+9.1+8.5+8.6+8.7+8.6}{6} = \frac{51.6}{6} = 8.6,$$

$$\begin{aligned}
 \text{乙得分的方差 } s_{\text{乙}}^2 &= \frac{1}{6} \times [(8.1-8.6)^2 + (9.1-8.6)^2 + \\
 &+ (8.5-8.6)^2 + (8.6-8.6)^2 + (8.7-8.6)^2 + (8.6-8.6)^2] \\
 &= \frac{1}{6} \times [(-0.5)^2 + 0.5^2 + (-0.1)^2 + 0^2 + 0.1^2 + 0^2] \\
 &= \frac{1}{6} \times (0.25 + 0.25 + 0.01 + 0 + 0.01 + 0) \\
 &= \frac{0.52}{6} \approx 0.09.
 \end{aligned}$$

0.61 > 0.09, 故 **D 正确** (另解: 从折线统计图的波动幅度可以看出乙比甲更平稳, 故甲得分的方差大于乙得分的方差). 故选 ABD.

9. C 【解析】对于 A, 由题图可知, 2024 年 10 月份食品烟酒类价格同比涨幅为 2%, 所以 2024 年 10 月份食品烟酒类价格高于 2023 年 10 月份食品烟酒类价格, 故 **A 错误**.

对于 B, 由题图可知, 2024 年 10 月份教育文化娱乐类价格环比涨幅为 0.2%, 所以 2024 年 10 月份教育文化娱乐类价格高于 2024 年 9 月份教育文化娱乐类价格, 故 **B 错误**.

对于 C, 由题图可知, 2024 年 10 月份医疗保健类价格环比涨幅为 0.0%, 即 2024 年 10 月份医疗保健类价格等于 2024 年 9 月份医疗保健类价格, 又 2024 年 10 月份医疗保健类价格同比涨幅为 1.1%, 所以 2024 年 10 月份医疗保健类价格高于 2023 年 10 月份医疗保健类价格, 故 **C 正确**.

对于 D, 由题图可知, 2024 年 10 月份居住类价格环比涨幅为 0.0%, 即 2024 年 10 月份居住类价格等于 2024 年 9 月份居住类价格, 又 2024 年 10 月份居住类价格同比涨幅为 -0.1%, 所以 2024 年 10 月份居住类价格低于 2023 年 10 月份居住类价格, 故 **D 错误**. 故选 C.

10. 【解】 (1) 由题意, 该校 2025 届大学毕业生选择“单位就业”

$$\text{的人数约为 } 2\,500 \times \frac{560}{1\,000} = 1\,400.$$

(2) 由题意, 样本中 1000 名毕业生选择“继续学习深造”的

$$\text{频率为 } \frac{200}{1\,000} = \frac{1}{5}.$$

用频率估计概率, 从该地区 2025 届大学毕业生中随机选取

1 名学生, 估计该生选择“继续学习深造”的概率为 $\frac{1}{5}$.



随机变量 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

$$\text{所以 } P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^3 = \frac{64}{125},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{48}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{125},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^0 = \frac{1}{125},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{64}{125} + 1 \times \frac{48}{125} + 2 \times \frac{12}{125} + 3 \times \frac{1}{125} = \frac{3}{5}.$$

(3) 易知五种毕业去向的人数的平均数为 200, 要使得方差最小, 则数据波动性越小, 故当自主创业和慢就业人数相等时方差最小, 所以 $a=42$.

11. B 【解析】 $10 \times 60\% = 6$, 则样本数据的 60% 分位数为 $\frac{21+22}{2} =$

21.5. 故选 B.

12. C 【解析】由题知共有 10 个数据, 从小到大排列后, 中位数是第 5 个和第 6 个数据的平均值. 将现有数据从小到大排列后, 当 $a < 35$ 时, 第 5 个数据为 33 或 a , 第 6 个数据为 35, 中位数小于 35, 不满足条件. 故若满足中位数为 35, 则需 $a \geq 35$. 故选 C.

13. B 【解析】这组数据的平均数为 $\frac{-6+1-2+t+2+1+5}{7} = \frac{t+1}{7}$.

除 t 外, 将剩余的 6 个数据由小到大排列, 依次为 $-6, -2, 1, 1, 2, 5$, 若 $t \leq 1$, 则这组数据的中位数为 1; 若 $t > 1$, 同理可知, 这组数据的中位数也为 1. 因为这组数据的中位数和平均数相等, 所以 $\frac{t+1}{7} = 1$, 解得 $t=6$. 故选 B.

14. AD 【解析】第一组数据从小到大排序为 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10,

$$\text{平均数为 } \frac{1}{7} \times (7+7+7+8+8+9+10) = 8,$$

$$\text{方差为 } \frac{1}{7} \times [(7-8)^2 + (7-8)^2 + (7-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2] = \frac{8}{7}, \text{极差为 } 10-7=3, \text{中位数为 } 8.$$

第二组数据从小到大排序为 5, 5, 8, 9, 9, 10, 10,

$$\text{平均数为 } \frac{1}{7} \times (5+5+8+9+9+10+10) = 8,$$

$$\text{方差为 } \frac{1}{7} \times [(5-8)^2 + (5-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2 + (10-8)^2] = 4, \text{极差为 } 10-5=5, \text{中位数为 } 9.$$

所以 **A, D** 正确, **B, C** 错误. 故选 AD.



15. C 【解析】由题意,得
$$\begin{cases} \frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)=5, \\ \frac{a_2+a_3}{2}=5, \end{cases}$$
 则 $a_2+a_3=$

$a_1+a_4=10$, 且 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, $2 \leq a_i \leq 8$, $i=1,2,3,4$, 则 a_1, a_2, a_3, a_4 可能的取值情况为 $2, 2, 8, 8; 2, 3, 7, 8; 2, 4, 6, 8; 2, 5, 5, 8; 3, 3, 7, 7; 3, 4, 6, 7; 3, 5, 5, 7; 4, 4, 6, 6; 4, 5, 5, 6; 5, 5, 5, 5$, 共 10 种情况. 故选 C.

16. AC 【解析】若平均数不变, 则 $\frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{1+2+3+4+5+x+y}{7}$, 解得 $x+y=6$, 故 A 正确;

当 $x=y=2$ 时, 极差不变, 但 $x+y \neq 6$, 故 B 错误;

若 $x+y=6$, 则 x, y 为 $1, 5$ 或 $2, 4$ 或 $3, 3$, 每一种情况对应的新数据的中位数都是 3, 故 C 正确;

已知 $x+y=6$, 原数据的平均数为 3, 方差为 $\frac{1}{5} \times (4+1+0+1+4) = 2$, 新数据的平均数为 3, 方差为 $\frac{1}{7} [(x-3)^2 + (y-3)^2 + 4+1+0+1+4] = \frac{28-2xy}{7} \geq \frac{28-18}{7} = \frac{10}{7}$, 当且仅当 $x=y=3$ 时等号成立, 所以方差有可能改变, 故 D 错误. 故选 AC.

17. ABC 【解析】对于 A, 由平均数的性质可得 $a_2 = ka_1 + 2\ 025$, 故 A 正确.

对于 B, 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 若 n 为奇数, 设 $n = 2m+1$ ($m \in \mathbf{N}$), 则数据 $x_1, x_2, \dots, x_{2m+1}$ 的中位数为 x_{m+1} .

当 $k > 0$ 时, 新样本数据由小到大依次为 $y_1, y_2, \dots, y_{2m+1}$, 这组数据的中位数为 $b_2 = y_{m+1} = kx_{m+1} + 2\ 025 = kb_1 + 2\ 025$;

当 $k < 0$ 时, 新样本数据由小到大依次为 $y_{2m+1}, y_{2m}, \dots, y_1$, 这组数据的中位数为 $b_2 = y_{m+1} = kx_{m+1} + 2\ 025 = kb_1 + 2\ 025$.

若 n 为偶数, 同理可知, $b_2 = kb_1 + 2\ 025$, 故 B 正确.

对于 C, 由方差的性质, 可得 $c_2 = k^2 c_1$, 故 C 正确.

对于 D, 若 x_i, x_j ($1 \leq i, j \leq n$) 分别是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的最大值、最小值,

当 $k > 0$ 时, 则 $y_i = kx_i + 2\ 025$ 为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 中的最大值, $y_j = kx_j + 2\ 025$ 为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 中的最小值, 此时 $d_2 = y_i - y_j = k(x_i - x_j) = kd_1$;

当 $k < 0$ 时, 则 $y_i = kx_i + 2\ 025$ 为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 中的最小值, $y_j = kx_j + 2\ 025$ 为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 中的最大值, 此时 $d_2 = y_j - y_i = -k(x_i - x_j) = -kd_1$, 故 D 错误. 故选 ABC.

18. ABC 【解析】不妨设原数据 $x_1 < x_2 < \dots < x_6$, 新数据 $y_1 < y_2 < \dots < y_5$.

对于 A, 例如原数据为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$, 新数据为 $1, 3, 4, 5, 6$, 此时极差均为 $6-1=5$, 故 A 正确.

对于 B, 原数据的中位数为 $\frac{x_3+x_4}{2}$, 新数据的中位数为 y_3 , 可



知 $y_3 = x_3$ 或 $y_3 = x_4$. 若 $y_3 = x_3$, 可得 $\frac{x_3 + x_4}{2} > x_3 = y_3$; 若 $y_3 = x_4$, 可得 $\frac{x_3 + x_4}{2} < x_4 = y_3$. 综上, 新数据的中位数不可能等于原数据的中位数, 故 **B 正确**.

对于 C, 若 $\bar{x} = \bar{y}$, 可知去掉的数据为 $\bar{x}$, 则 $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2$, 可得 $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 < \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2$, 所以新数据的方差一定大于原数据的方差, 故 **C 正确**.

对于 D, 若 $\bar{x} = \bar{y}$, 可知去掉的数据为 $\bar{x}$. 因为 $6 \times 40\% = 2.4$, 可知原数据的 40% 分位数为第 3 位数, $5 \times 40\% = 2$, 可知新数据的 40% 分位数为第 2 位数与第 3 位数的平均数.

例如原数据为 -2, 2, 3, 4, 5, 6, 新数据为 -2, 2, 4, 5, 6, 此时新数据的 40% 分位数、原数据的 40% 分位数均为 3, 故 **D 错误**. 故选 ABC.

- 19. 【解】**(1) 由题意, 样本中日均户外活动时间长不低于 1 小时的学生有 $20 + 10 = 30$ (人), 其中近视的学生有 $20 \times 0.4 + 10 \times 0.2 = 10$ (人), 所以估计该校日均户外活动时间长不低于 1 小时的学生的近视率为 $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

(2) 设事件 $A =$ “从该校日均户外活动时间长低于 1 小时的学生和不低于 1 小时的学生中各随机选取 2 名, 这 4 名学生中恰有 2 名近视”.

由题意, 从该校日均户外活动时间长低于 1 小时的学生中随机选取 1 名, 这名学生近视的概率为 $\frac{4}{5}$, 从该校日均户外活动时间长不低于 1 小时的学生中随机选取 1 名, 这名学生近视的概率为 $\frac{1}{3}$, 则 $P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + C_2^1 \times \frac{4}{5} \times$

$$\left(1 - \frac{4}{5}\right) \times C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{97}{225}.$$

(3) 由题意可知, 日均户外活动时间长在区间 $[0, 1)$ 内的频率为 0.7, 日均户外活动时间长在区间 $[1, 2)$ 内的频率为 0.2, 日均户外活动时间长在区间 $[2, 3]$ 内的频率为 0.1, 则原数据的平均数为 $\bar{x}_0 = 0.5 \times 0.7 + 1.5 \times 0.2 + 2.5 \times 0.1 = 0.9$.

采取措施一后该校全体学生的日均户外活动时长的平均值为 $\bar{x} = \bar{x}_0 + 0.5 = 1.4$;

采取措施二后该校全体学生的日均户外活动时长的平均值为 $\bar{y} = (0.5 + 1) \times 0.7 + 1.5 \times 0.2 + 2.5 \times 0.1 = 1.6$.

因为 $1.4 < 1.6$, 所以 $\bar{x} < \bar{y}$.

- 20. 【解】**(1) 因为样本极差为 5, 所以 $s = 9 - 5 = 4$, $t = 90 - 6 - 19 - 25 - 16 - 8 = 16$.

(2) 参与药物测试的小鼠的日均睡眠时长的平均数为 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (3 \times 7 + 6 + 8) = 7$, 所以方差 $s^2 = \frac{1}{5} \times [(6 - 7)^2 + 3 \times (7 - 7)^2 + (8 - 7)^2] = \frac{2}{5}$.



(3) 因为抽取所得的小鼠的日均睡眠时长分别为 6, 7, 7, 8, 7, 所以 X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=1) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

21. C 【解析】题图①的频率分布直方图是对称的, 所以平均数 = 中位数 = 众数, 故 **A** 正确;

题图②中“右拖尾”, 众数最小, 平均数大于中位数, 故 **B** 正确, **C** 错误;

题图③中“左拖尾”, 众数最大, 平均数小于中位数, 故 **D** 正确. 故选 C.

22. B 【解析】因为 $0.005 \times 10 + 0.015 \times 10 + 0.020 \times 10 = 0.4$,

$$0.005 \times 10 + 0.015 \times 10 + 0.020 \times 10 + 0.030 \times 10 = 0.7,$$

所以这次调查数据的第 64 百分位数位于 $[70, 80)$ 之间.

设这次调查数据的第 64 百分位数为 x , 则有 $\frac{x-70}{10} =$

$$\frac{0.64-0.4}{0.7-0.4}, \text{ 解得 } x=78. \text{ 故选 B.}$$

23. AC 【解析】对于 A, 由题意可得 $a \times 1 + 0.2 \times 1 + 0.15 \times 1 = 0.7$, $0.05 \times 1 + b \times 1 + 0.15 \times 1 + a \times 1 + 0.2 \times 1 + 0.15 \times 1 = 1$, 解得 $a=0.35, b=0.1$, 故 **A** 正确.

对于 B, 甲试验区产量的众数为 17.5, 乙试验区产量的众数为 19.5, 甲试验区产量的众数小于乙试验区产量的众数, 故 **B** 错误.

对于 C, 甲试验区产量的平均数为 $15.5 \times 0.15 + 16.5 \times 0.2 + 17.5 \times 0.3 + 18.5 \times 0.2 + 19.5 \times 0.1 + 20.5 \times 0.05 = 17.55$, 乙试验区产量的平均数为 $16.5 \times 0.05 + 17.5 \times 0.1 + 18.5 \times 0.15 + 19.5 \times 0.35 + 20.5 \times 0.2 + 21.5 \times 0.15 = 19.5$, 甲试验区产量的平均数小于乙试验区产量的平均数, 故 **C** 正确.

对于 D, 设甲试验区产量的 75% 分位数为 x , 则 $0.15 + 0.2 + 0.3 + 0.2 \times (x-18) = 0.75$, 解得 $x=18.5$, 设乙试验区产量的中位数为 y , 则 $0.05 + 0.1 + 0.15 + 0.35 \times (y-19) = 0.5$, 解得 $y \approx 19.57$, 甲试验区产量的 75% 分位数小于乙试验区产量的中位数, 故 **D** 错误. 故选 AC.

24. 【解】(1) 由图可得 $(0.01 \times 2 + 0.02 + 2m) \times 10 = 1$, 得 $m=0.03$.

(2) 估计这 100 名群众的分数的平均数 $\bar{x} = 55 \times 0.1 + 65 \times 0.1 + 75 \times 0.2 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.3 = 81$ (分).

(3) 由题意, 抽取的分数在 $[70, 80)$ 内的群众人数为 $5 \times \frac{0.2}{0.2+0.3} = 2$ (人), 编号为 a, b , 抽取的分数在 $[90, 100]$ 内的



群众人数为 $5 \times \frac{0.3}{0.2+0.3} = 3$ (人), 编号为 1, 2, 3,

则该试验的样本空间为 $\{(a, b), (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, 共 10 个样本点, 事件“这 2 名群众的分数均在 $[90, 100]$ 内”包含的样本点为 $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$, 所以这 2 名群众的分数均在 $[90, 100]$ 内的概率为 $\frac{3}{10}$.

第 6 节 成对数据的统计分析



题型上分练

1. A 【解析】因为变量 x 和 y 满足关系 $y = -x + 1$, 变量 y 与 z 正相关, 所以由正相关、负相关的定义可知 x 与 y 负相关, x 与 z 负相关. 故选 A.

2. A 【解析】从题图中看出 y 随 x 增大而减少 (图象下降), v 随 u 增大而减少 (图象下降), 则 y 与 x 呈负相关关系, v 与 u 呈负相关关系, 即 $r_1 < 0, r_2 < 0$, 故 C, D 错误; 对比两图, 容易看出 y 与 x 的线性相关程度更强, 故 r_1 更接近 -1, 所以得 $-1 < r_1 < r_2 < 0$, 故 A 正确, B 错误. 故选 A.

3. A 【解析】在选项 A 的散点图中, 这些点紧密地聚集在一条直线附近, 其样本相关系数接近于 -1;

在选项 B 的散点图中, 线性负相关程度不及 A, 比较分散, 即样本相关系数要比选项 A 的大;

在选项 C 的散点图中, 散点呈现出一定的上升趋势, 其样本相关系数为正数;

在选项 D 的散点图中, 散点比较分散, 线性相关程度比选项 A 要弱, 样本相关系数比选项 A 的大.

综合比较四个选项, 选项 A 线性负相关程度最强, 所以样本相关系数最小. 故选 A.

4. B 【解析】因为 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 0.16$, 所以预测值为 $\hat{y} = \hat{b} \times 2 + 0.16$.

又因为残差 = 观测值 - 预测值, 所以 $0.12 = 1.4 - (\hat{b} \times 2 + 0.16)$, 所以 $\hat{b} = 0.56$. 故选 B.

5. A 【解析】由题设知 $\bar{x} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}$, 则 $\bar{y} = 2\bar{x} - 1 = 2 \times \frac{11}{3} - 1 = \frac{19}{3}$,

增加数据 $(-3, 3)$ 后, $\bar{x}_1 = \frac{33-3}{10} = 3$, $\bar{y}_1 = \frac{9 \times \frac{19}{3} + 3}{10} = 6$, 修正后的

经验回归方程为 $\hat{y}' = 2.1x + \hat{a}$, 所以 $6 = 2.1 \times 3 + \hat{a}$, 解得 $\hat{a} = -0.3$, 则 $\hat{y}' = 2.1x - 0.3$.

当 $x = 4$ 时, $\hat{y}' = 2.1 \times 4 - 0.3 = 8.1$, 故此时残差的绝对值为 $|8 - 8.1| = 0.1$. 故选 A.

6. D 【解析】从散点图可分析出, 若去掉点 $D(3, 10)$, 则剩下的点更能集中在一条直线附近, 所以解释变量 x 与响应变量 y 的线性相关性变强, 数据的离散程度减小, 所以 y 的方差变小, 决定系数 R^2 会变大, 拟合效果变好, 残差平方和变小. 故选 D.



7. BC 【解析】对于 A, 因为 $\hat{y} = -0.85x + 2.3$, 所以当解释变量 x 每增加 1 时, 响应变量 y 平均减少 0.85, 故 A 错误;

对于 B, 因为当 $x = 1$ 时, $\hat{y} = -0.85 \times 1 + 2.3 = 1.45$, $1.2 - 1.45 = -0.25$, 所以相对于样本点 $(1, 1.2)$ 的残差为 -0.25 , 故 B 正确;

对于 C, 在残差图中, 当残差比较均匀地分布在以取值为 0 的横轴为对称轴的水平带状区域内时, 水平带状区域的宽度越窄, 其模型的拟合效果越好, 故 C 正确;

对于 D, 由决定系数 R^2 的意义可知, R^2 越大, 表示残差平方和越小, 即模型的拟合效果越好, 故 D 错误. 故选 BC.

8. C 【解析】由经验回归直线过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$, 知 $\hat{a} = 0.58 - 0.025 \times 21.2 = 0.05$, 故 A 错误;

小麦对氮元素的吸收量与它的根长度具有正相关关系, 故样本相关系数 $r > 0$, 故 B 错误;

由经验回归方程可得在一定范围内, 小麦的根长度每增加 1 cm, 它一天的氮元素吸收量平均增加 0.025 mg, 故 C 正确;

若研究小麦的根长度与钾元素吸收量的相关关系, 则对应的经验回归方程可能发生改变, 故 D 错误. 故选 C.

9. BC 【解析】 $\bar{y}' = \frac{y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + \cdots + y_n + 1}{n} =$

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{n} + 1 = \bar{y} + 1, \text{ 故 A 错误;}$$

在 $\hat{b}$ 的计算中, 因为 x_i 数据不变, 且 $y_i - \bar{y} = (y_i + 1) - \bar{y}'$, 所以 $\hat{b} = \hat{b}'$, 故 B 正确;

$$\hat{a}' = \bar{y}' - \hat{b}\bar{x} = \bar{y} + 1 - \hat{b}\bar{x} = \hat{a} + 1 > \hat{a}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{由于 } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, y_i \text{ 变成了 } y_i + 1, \bar{y}' = \bar{y} + 1, \hat{y}'_i =$$

$$\hat{b}'x'_i + \hat{a}' = \hat{b}x_i + \hat{a} + 1 = \hat{y}_i + 1, \text{ 从而 } y_i - \hat{y}_i, y_i - \bar{y} \text{ 都不变, 所以 } R^2 = R'^2, \text{ 故 D 错误. 故选 BC.}$$

10. ABD 【解析】由经验回归函数 $\hat{y} = -0.02x + \hat{a}_1$ 单调递减, 可知样本 (x_i, y_i) 负相关, 故 A 正确;

由题意, 处理前样本均值分别为 $\bar{x} = 2 \times 10^3$, $\bar{y} = 9.7$, 由样本点中心在经验回归直线上, 将 $\bar{x}, \bar{y}$ 代入经验回归方程,

解得 $\hat{a}_1 = 49.7$, 故 B 正确;

由题图①的数据波动较大, 可得 $\hat{u}_i$ 比 $\hat{e}_i$ 更集中, 所以 $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$, 故 C 错误;

由题图①的残差平方和比题图②的残差平方和大, 可知处理后拟合效果更好, 决定系数变大, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. 【解】(1) 因为 $\bar{x} = \frac{60+70+80+90+100}{5} = 80$, $\bar{y} =$

$$\frac{95+104+108+116+122}{5} = 109,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (60 - 80)^2 + (70 - 80)^2 + (80 -$$



$$80)^2 + (90 - 80)^2 + (100 - 80)^2 = 1\,000,$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{660}{1\,000} = 0.66,$$

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 109 - 0.66 \times 80 = 56.2$, 所以加工时间 y 关于零件数 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.66x + 56.2$.

(2) 由经验回归方程可知, $\hat{b} = 0.66 > 0$, 说明加工零件个数 x 与加工时间 y 正相关, 零件数每增加一个, 加工时间平均增加 0.66 min (答案不唯一).

12. 【解】 (1) 由表中数据可得 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 90, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10$,

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 434, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 64, \text{ 所以 } r =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{64}{\sqrt{4\,340}} \approx 0.97 > 0.75, \text{ 所以}$$

可以用线性回归模型拟合人数 y 和时间第 x 天之间的关系.

$$\text{故 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{64}{10} = 6.4,$$

则 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 90 - 6.4 \times 3 = 70.8$, 所以 $\hat{y} = 6.4x + 70.8$.

令 $x = 6$, 可得 $\hat{y} = 109.2$, 所以 1 月 10 日到该专营店购物的人数约为 109.

(2) **选方案一:** 需付款 $1\,000 - 50 = 950$ (元).

选方案二: 设需付款 X 元, 则 X 的所有可能取值为 600, 800, 900, 1 000,

$$\text{则 } P(X = 600) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

$$P(X = 800) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64},$$

$$P(X = 900) = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64},$$

$$P(X = 1\,000) = C_3^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

$$\text{所以 } E(X) = 600 \times \frac{1}{64} + 800 \times \frac{9}{64} + 900 \times \frac{27}{64} + 1\,000 \times \frac{27}{64} =$$

$$\frac{59\,100}{64} < 950.$$

因此选择方案二更优惠.

13. 【解】 (1) 设 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 由题设有

$$\bar{y} = 125, \bar{x} = 90, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i - 8\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^8 x_i^2 - 8\bar{x}^2} = \frac{90\,263 - 90\,000}{332} =$$

$$\frac{263}{332} \approx 0.79, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 125 - \frac{263}{332} \times 90 \approx 53.70,$$

故所求经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a} = 0.79x + 53.70$.



$$(2) \text{ 由 } r = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i - 8 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2 - 8 \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^8 y_i^2 - 8 \bar{y}^2}} = \frac{263}{\sqrt{332} \times \sqrt{500}} < \frac{263}{\sqrt{324} \times \sqrt{484}} = \frac{263}{18 \times 22} \approx 0.66 < 0.75,$$

故这 8 名学生的物理成绩和数学成绩不具有较强的线性相关关系.

14. 【解】(1) 选择模型②, 理由如下:

由于模型②的残差比较均匀地分布在以取值为 0 的横轴为对称轴的水平带状区域内, 且带状区域的宽度比模型①窄, 所以模型②的拟合精度更高, 经验回归方程的预报精度相应就会更高, 故应选模型②.

(2) 根据模型②, 令 $t = \sqrt{x}$, y 与 t 可用经验回归直线来拟合, 有 $\hat{y} = \hat{c} + \hat{d}t$.

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i y_i - 10 \bar{t} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{10} t_i^2 - 10 \bar{t}^2} = \frac{2.88}{4.5} = 0.64,$$

所以 $\hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{t} = 7.5 - 0.64 \times 2.25 = 6.06$, 则 y 关于 t 的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.64t + 6.06$, 所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.64\sqrt{x} + 6.06$.

令 $0.64\sqrt{x} + 6.06 > 8$, 解得 $x > \left(\frac{97}{32}\right)^2 \approx 9.2$, 又 x 为整数, 所以 $x \geq 10, x \in \mathbf{Z}$.

所以要使年收益增量超过 8 亿元, 研发人员增量至少为 10 人.

15. 【解】(1) 由题意, 16 年中有 4 年居民存款余额超过 100 万

亿元, 故所求概率为 $\frac{C_4^1 C_{12}^1}{C_{16}^2} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$.

(2) 令 $z = \ln y, \because y = a \cdot e^{bt}, \therefore z = \ln y = \ln a + bt$.

由题知, $\bar{t} = \frac{1}{16} \times (1+2+3+\cdots+16) = 8.5$,

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{16} z_i t_i - 16 \bar{z} \bar{t}}{\sum_{i=1}^{16} t_i^2 - 16 \bar{t}^2} \approx \frac{578 - 16 \times 4 \times 8.5}{340} = 0.1,$$

$$\therefore \ln a = \bar{z} - \hat{b}\bar{t} \approx 4 - 0.1 \times 8.5 = 3.15,$$

$\therefore z = \ln y = 0.1t + 3.15$, 故 y 关于 t 的经验回归方程为 $y = 23.34e^{0.1t}$.

16. 【解】(1) 新能源汽车保有量大于 3 万辆的年份有第 4, 5, 6

年, 共 3 年, 新能源汽车保有量不大于 3 万辆的年份有第 1, 2, 3 年, 共 3 年, 设任意选取的 2 年中至少有 1 年新能源汽车保有量大于 3 万辆为事件 A , 任意选取的 2 年中新能源汽车保有量全都大于 3 万辆为事件 B .

$$P(A) = 1 - \frac{C_3^2}{C_6^2} = 1 - \frac{3}{15} = \frac{4}{5},$$

$$P(AB) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$



$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

(2) 已知模型 $y = ce^{dx}$ ($c > 0$), 等号两边同时取对数得 $\ln y = \ln c + dx$, 令 $t = \ln y$, 则 $t = \ln c + dx$,

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i t_i - n \bar{x} \bar{t}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{31.89 - 6 \times 3.5 \times 1.16}{91 - 6 \times 3.5^2} = \frac{7.53}{17.5} \approx 0.43,$$

$$\ln \hat{c} = \bar{t} - \hat{d} \bar{x} = 1.16 - 0.43 \times 3.5 = -0.345 \approx -0.35,$$

$$\text{则 } y = e^{-0.35} e^{0.43x} = e^{0.43x - 0.35}.$$

17. 【解】(1) 列联表如表所示:

	近视人数	未近视人数	合计
户外活动时长 不足 2 小时	35	10	45
户外活动时长 超过 2 小时	25	30	55
合计	60	40	100

零假设 H_0 : 学生的近视情况与户外活动时间长短无关.

根据列联表中的数据, 经计算得到 $\chi^2 = \frac{100 \times (35 \times 30 - 25 \times 10)^2}{60 \times 40 \times 45 \times 55} = \frac{3200}{297} \approx 10.774 > 7.879$,

根据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为学生的近视情况与户外活动时间长短有关联.

(2) 设事件 A = “近视学生使用‘物理+药物’治疗方案并且被治愈”,

事件 B_1 = “该近视学生每天户外活动时间超过 2 小时”,

B_2 = “该近视学生每天户外活动时间不足 2 小时”,

$$\text{则 } P(B_1) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}, P(B_2) = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}, \text{ 且 } P(A|B_1) = \frac{5}{6},$$

$$P(A|B_2) = \frac{2}{3},$$

$$\text{则 } P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{6} + \frac{7}{12} \times$$

$$\frac{2}{3} = \frac{53}{72},$$

所以近视学生使用“物理+药物”治疗方案被治愈的概率为

$$\frac{53}{72}.$$

18. 【解】(1) 由频率分布直方图中所有小矩形的面积之和为 1,

可得 $(a + 0.01 \times 2 + 0.005 + 0.015 + 0.025) \times 10 = 1$, 解得 $a =$

$$0.035, \text{ 样本容量为 } \frac{10}{0.01 \times 10} = 100.$$

(2) 设所有参赛学生的平均成绩为 $\bar{x}$, 则 $\bar{x} = 95 \times 0.1 + 105 \times 0.1 + 115 \times 0.25 + 125 \times 0.35 + 135 \times 0.15 + 145 \times 0.05 = 120$.

(3) 由题意可知, 获奖人数为 $100 \times (0.015 + 0.005) \times 10 = 20$, 由题意可得 2×2 列联表如下:



性别	奖励		合计
	获奖	未获奖	
男	15	45	60
女	5	35	40
合计	20	80	100

零假设 H_0 : 获奖情况与性别无关.

$$\chi^2 = \frac{100 \times (15 \times 35 - 45 \times 5)^2}{20 \times 80 \times 60 \times 40} \approx 2.344 < 6.635,$$

所以依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 推断零假设成立, 即获奖情况与性别无关.

真题风向练

19. 命题点 ⊙ 用频率估计概率、独立性检验

【解】(1) 根据题表数据可知, 超声波检查结果不正常的有 200 人, 其中患该疾病的有 180 人, 因此估计超声波检查结果不

正常者患该疾病的概率 $p = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$ (易错: 注意该问所求概率中用到的数据, 数据找错, 计算也就出错). 6 分

(2) 第一步: 给出零假设.

零假设为 H_0 : 超声波检查结果与患该疾病无关. 8 分

第二步: 计算 χ^2 的值并与 $\chi_{0.001}$ 进行比较.

$$\chi^2 = \frac{1\,000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{200 \times 800 \times 800 \times 200} = 765.625 > 10.828. \quad \cdots 11 \text{ 分}$$

第三步: 给出独立性检验的结果.

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 有充分证据推断 H_0 不成立, 即认为超声波检查结果与患该疾病有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.001. 13 分

专题 概率统计与其他知识的综合运用



题型上分练

1. B 【解析】由题意可知, X 服从二项分布 $B(3, p_1)$, 所以

$$E(X) = 3p_1, D(X) = 3p_1(1-p_1).$$

同理可得 Y 服从二项分布 $B(3, p_2)$, 所以 $E(Y) = 3p_2$,

$$D(Y) = 3p_2(1-p_2).$$

因为 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$, 所以 $3p_1 < 3p_2$, 所以 $E(X) < E(Y)$.

对于二次函数 $y = 3p(1-p)$, 其图象的对称轴方程为 $p = \frac{1}{2}$,

所以函数在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减, 所以当 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$

时, $3p_1(1-p_1) > 3p_2(1-p_2)$, 即 $D(X) > D(Y)$. 故选 B.

2. BD 【解析】由题意易知坐公交的方差比骑自行车的方差

关键点

大, 即 X 的正态曲线较“矮胖”, Y 的正态曲线更“瘦高”, 则 X 的正态曲线在 38 min 后在 Y 的正态曲线的上方, 可在同一平面直角坐标系中作出 X, Y 的正态曲线, 如图所示.

易知 $P(X > 38) > P(Y > 38)$, 故 A 错误;

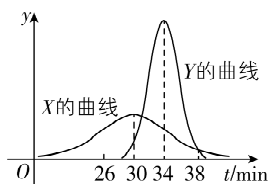


由 $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ 可知 $P(30 - 6 \leq X \leq 30 + 6) = P(34 - 2 \leq Y \leq 34 + 2)$, 故 **B** 正确;

根据条件知两种方式相应的正态密度函数分别为 $f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{72}}$, $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-34)^2}{8}}$, 建立方程 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-34)^2}{8}} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{72}} \Rightarrow e^{\frac{(x-34)^2}{8} - \frac{(x-30)^2}{72}} = 3$, 整理可得 $8x^2 - 552x + 9 \times$

$34^2 - 30^2 = 72 \ln 3$, 则 $t_1 + 38 = \frac{552}{8} = 69 \Rightarrow t_1 = 31 > 30$, 故 **C** 错误;

易知 $P(X \leq 34) > 0.5 = P(Y \leq 34)$, 故 **D** 正确. 故选 BD.



3. C 【解析】因为随机变量 X 服从两点分布, 所以 $n=2$.

由题意, $p_1 = p$, $p \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 所以 $p_2 = 1 - p$, 则 $p_2 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 所以 $H(X) = - \sum_{i=1}^2 p_i \ln p_i = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p)$.

设 $f(p) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p)$, $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$,

则 $f'(p) = \ln(1-p) - \ln p$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

因为当 $p \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(p) > 0$, 当 $p \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ 时, $f'(p) < 0$, 所以 $f(p)$ 在 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ 上单调递减, 所以 $f(p) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \approx 0.69 < 0.7$,

且 $f(p) > f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(p) > f\left(\frac{2}{3}\right)$, 显然 $f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right)$.

又 $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{2}{3} \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{2}{3} (\ln 3 - \ln 2) = \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$,

代入 $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 3 \approx 1.10$, 得 $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1.10 - \frac{2}{3} \times 0.69 = 0.64 > 0.6$, 所以 $f(p) > 0.6$.

综上, $0.6 < f(p) < 0.7$, 即 $0.6 < H(X) < 0.7$.

4. 【解】(1) 记初赛总题数 $N=6$, 甲会做的题目个数 $M=4$, 从中任选 2 道题作答, 则 $n=2$, 故甲答对的题目个数 X 服从超几何分布, 其数学期望 $E(X) = n \cdot \frac{M}{N} = 2 \times \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$.

由条件概率公式得甲在已经答对一题的前提下, 仍未进入决

赛的概率 $P = \frac{P(X=1)}{P(X \geq 1)} = \frac{\frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2}}{1 - \frac{C_6^2}{C_6^2}} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{14}{15}} = \frac{4}{7}$.



(2) 设每名进入决赛的同学获得的奖金为 Y 元, Y 的所有可能取值为 60, 120, 180, 360, 则 $P(Y=60) = (1-p)^3$, $P(Y=120) = 3p(1-p)^2$, $P(Y=180) = 3p^2(1-p)$, $P(Y=360) = p^3$, Y 的期望 $E(Y) = 60(1-p)^3 + 360p(1-p)^2 + 540p^2(1-p) + 360p^3$, 化简得 $E(Y) = 60(1+3p+2p^3)$.

这 9 名同学获得的总奖金的期望 $E(9Y) = 9E(Y) \geq 1120$, 即 $540(1+3p+2p^3) \geq 1120$, 整理得 $2p^3 + 3p + 1 \geq \frac{56}{27}$, 即 $54p^3 + 81p - 29 \geq 0$.

令 $g(p) = 54p^3 + 81p - 29 \left(0 < p < \frac{3}{4}\right)$, 由 $g'(p) = 162p^2 + 81 > 0$ 知

$g(p)$ 在 $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ 上单调递增,

又 $g\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, 由 $g(p) \geq 0$ 得 $p \geq \frac{1}{3}$, 结合 $0 < p < \frac{3}{4}$,

易错点

得 p 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

5. 【解】(1) 由题图可得 $\bar{x} = 4 \times 0.05 + 5 \times 0.10 + 6 \times 0.25 + 7 \times 0.35 + 8 \times 0.15 + 9 \times 0.10 = 6.75$,

则 $X \sim N(6.75, 1.25^2)$, 故 $P(X \geq 8) = P(X \geq \mu + \sigma) = \frac{1}{2} [1 -$

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)] \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) \approx 0.16$, 即该部件为

A 等品的概率约为 0.16.

(2) ① 样本中质量指标值在 $[3.5, 4.5)$ 和 $[8.5, 9.5]$ 的总件数为 $100 \times (0.05 + 0.10) = 15$, 其中质量指标值在 $[8.5, 9.5]$ 的件数是 $100 \times 0.10 = 10$.

由题知, η 的所有可能的取值是 0, 1, 2, 3,

$$P(\eta=0) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}, P(\eta=1) = \frac{C_5^2 C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{100}{455} = \frac{20}{91},$$

$$P(\eta=2) = \frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}, P(\eta=3) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91},$$

则 η 的分布列为

η	0	1	2	3
P	$\frac{2}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{24}{91}$

$$\text{数学期望 } E(\eta) = 0 \times \frac{2}{91} + 1 \times \frac{20}{91} + 2 \times \frac{45}{91} + 3 \times \frac{24}{91} = 2.$$

② 设每箱产品的利润为 Z 元, 其中有 Y 件 A 等品.

由题知, $Z = Yx + (100 - Y) \ln(50 - x)$.

由(1)知, 任取一个部件, 这个部件为 A 等品的概率约为 0.16, 则 $Y \sim B(100, 0.16)$, 于是 $E(Y) = 16$, $E(Z) = 16x + 84 \ln(50 - x)$.

记 $f(x) = 16x + 84 \ln(50 - x)$, $20 < x < 49$,

$$\text{则 } f'(x) = 16 - \frac{84}{50 - x} = \frac{716 - 16x}{50 - x} \quad (20 < x < 49),$$

则当 $20 < x < \frac{179}{4}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,



当 $\frac{179}{4} < x < 49$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

故当 $x = \frac{179}{4}$ 时每箱产品的利润最大.

6. 【解】(1) 由题意知, ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(\xi=0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, P(\xi=1) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35},$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}, P(\xi=3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35},$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$\text{数学期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7}.$$

(2) 因为甲、乙两人每次答题互不影响, 设甲答对题数为 ζ , 乙答对题数为 η , 事件 A = “甲、乙两位同学在每轮答题中取胜”, 则 $\zeta \sim B(2, p_1)$, $\eta \sim B(2, p_2)$,

$$P(A) = P(\zeta=1)P(\eta=2) + P(\zeta=2)P(\eta=1) + P(\zeta=2)P(\eta=2)$$

$$= C_2^1 p_1 (1-p_1) C_2^2 p_2^2 + C_2^2 p_1^2 C_2^1 p_2 (1-p_2) + C_2^2 p_1^2 C_2^2 p_2^2$$

$$= 2p_1(1-p_1)p_2^2 + 2p_2(1-p_2)p_1^2 + p_1^2 p_2^2$$

$$= -3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2.$$

由 $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1, p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$, 得 $\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 1$,

$$\text{所以 } p_1 p_2 = p_1 \left(\frac{4}{3} - p_1 \right) = \frac{4}{3} p_1 - p_1^2.$$

$$\text{又 } \frac{1}{3} \leq p_1 \leq 1, \text{ 所以 } p_1 p_2 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{9} \right].$$

设 $t = p_1 p_2$, 则 $P(A) = -3t^2 + \frac{8}{3}t, t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{9} \right]$, 由二次函数的

性质可知, 当 $t = \frac{4}{9}$ 时, 甲、乙两位同学在每轮答题中取胜的

概率最大, 最大值为 $\frac{16}{27}$.

7. ACD 【解析】初始时球在甲手中, 即 $p_0 = 1, q_0 = 0$. 第一次抛

硬币后, $p_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, q_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 即满足 $p_1 = 2q_1$, 故 A

正确.

设 r_n 表示第 n 次抛硬币后球在丙手中的概率, 由对称性知 $q_n = r_n$, 则 $p_n + 2q_n = p_n + q_n + r_n = 1$, 故 C 正确.

第 n 次抛硬币后, 球在甲手中的概率 $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} \times$

$\frac{1}{2}(q_{n-1} + r_{n-1})$ (*), 由 $p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1} = 1$, 得 $q_{n-1} = 1 - p_{n-1} - r_{n-1}$,

代入(*)可得 $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{4} p_{n-1} + \frac{1}{4}$, 则 $p_n -$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(p_{n-1} - \frac{1}{3} \right)$, 又 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 所以数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{3} \right\}$ 是首



项为 $\frac{1}{6}$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列, 则 $p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^{n-1}}$, 即 $p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4^n}$. 又 $q_n = r_n$, 所以 $q_n = \frac{1-p_n}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^n}$, 故 $p_n > \frac{1}{3} > q_n$, 故 **D** 正确.

由 X 表示前 n 次抛硬币的过程中 3 人之间传球的次数, 每次传球的概率为 $\frac{1}{2}$, 且各次传球相互独立, 得 $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, 故其方差 $D(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$, 故 **B** 错误. 故选 ACD.

8. C 【解析】由题意可知, i 的取值集合为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 且 $P_0 = 0, P_6 = 1$.

在甲累计得分为 1 时, 下局甲胜且最终甲获胜的概率为 $0.5P_2$;

在甲累计得分为 1 时, 下局平局且最终甲获胜的概率为 $0.2P_1$;

在甲累计得分为 1 时, 下局甲败且最终甲获胜的概率为 $0.3P_0$.

根据全概率公式可得 $P_1 = 0.5P_2 + 0.2P_1 + 0.3P_0$,

整理得 $P_2 = \frac{8}{5}P_1 - \frac{3}{5}P_0$, 变形得 $P_2 - P_1 = \frac{3}{5}(P_1 - P_0)$.

因为 $P_1 - P_0 > 0$, 所以 $\frac{P_2 - P_1}{P_1 - P_0} = \frac{3}{5}$,

同理可得 $\frac{P_3 - P_2}{P_2 - P_1} = \frac{P_4 - P_3}{P_3 - P_2} = \frac{P_5 - P_4}{P_4 - P_3} = \frac{P_6 - P_5}{P_5 - P_4} = \frac{3}{5}$.

所以 $\{P_{i+1} - P_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 5)$ 是公比为 $\frac{3}{5}$ 的等比数列, 所以

以 $P_{i+1} - P_i = \left(\frac{3}{5}\right)^i (P_1 - P_0) (i = 0, 1, 2, \dots, 5)$,

即 $\sum_{i=1}^5 (P_{i+1} - P_i) = \sum_{i=1}^5 \left[\left(\frac{3}{5}\right)^i (P_1 - P_0) \right]$,

则 $P_6 - P_1 = (P_1 - P_0) \cdot \frac{\frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^6}{1 - \frac{3}{5}}$,

即 $1 - P_1 = P_1 \cdot \frac{\frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^6}{1 - \frac{3}{5}}$, 解得 $P_1 = \frac{2 \times 5^5}{5^6 - 3^6}$. 故选 C.

9. $\frac{10}{13}$ 【解析】由题意知, 当粒子在 1 号仓时, 1 次运动后到容

器外的概率为 $\frac{2}{3}$, 到 2 号仓的概率为 $\frac{1}{3}$;

当粒子在 2 号仓时, 1 次运动后到 1 号仓的概率为 $\frac{1}{3}$, 到 3 号仓的概率为 $\frac{1}{3}$;

当粒子在 3 号仓时, 1 次运动后到 2 号仓的概率为 $\frac{1}{2}$.

设 n 次运动后, 粒子在 1 号仓、2 号仓、3 号仓的概率分别为



$$a_n, b_n, c_n, \text{ 则 } a_1=0, a_2=\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, a_3=0;$$

$$b_1=\frac{1}{3}, b_2=0, b_3=\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{54};$$

$$c_1=0, c_2=\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, c_3=0.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{1}{3}b_{n-1}, b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1}, c_n = \frac{1}{3}b_{n-1},$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{9}b_{n-2} + \frac{1}{6}b_{n-2} = \frac{5}{18}b_{n-2} (n \geq 3).$$

$$\therefore b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = 0, \therefore \begin{cases} b_{2k} = 0, \\ b_{2k-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{18}\right)^{k-1}, \end{cases} k \in \mathbf{N}^*.$$

$$\therefore a_1 = 0, \therefore \begin{cases} a_{2k-1} = 0, \\ a_{2k} = \frac{1}{9} \times \left(\frac{5}{18}\right)^{k-1}, \end{cases} k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9} \times \left(\frac{5}{18}\right)^{k-1} \approx \frac{1}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{18}} = \frac{2}{13}$$

(提示: 公比 q 满足 $0 < q < 1$ 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的所有项的和 $S_n \approx \frac{a_1}{1-q}$),

$$\therefore \text{所求概率为 } \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{13} = \frac{10}{13}.$$

10. 【解】(1) 由题可知, 正四面体与桌面接触的数字为 1, 2 的概率均为 $\frac{1}{2}$.

Y 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

则 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(2) 由题可知 $P_1=0$, 当 $n \geq 2$ 时, 抛掷 $(n-1)$ 次底面的数字之和能被 3 整除的概率为 P_{n-1} ,

$$\text{所以 } P_n = \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}), \text{ 则 } P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{3}\right),$$

所以数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数

列, 则 $P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 即 $P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.



11. 【解】(1) 女生打结慢有 $90 - 35 = 55$ (人), 男生总计 $200 - 90 = 110$ (人), 男生打结快有 $110 - 45 = 65$ (人), 补充列联表如下:

性别	绳子打结速度		合计
	快	慢	
男生	65	45	110
女生	35	55	90
合计	100	100	200

零假设 H_0 : 绳子打结速度快慢与学生性别无关联,

$$\chi^2 = \frac{200 \times (65 \times 55 - 45 \times 35)^2}{100 \times 100 \times 110 \times 90} = \frac{800}{99} \approx 8.081 > 6.635 = \chi_{0.01},$$

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立,

即认为绳子打结速度快慢与学生性别有关联, 此推断犯错误的概率不大于 0.01.

(2) ① 4 根绳子所有的打结方式共有 $\frac{C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_4^4} = 105$ (种),

围成两圈的情况共有 $C_4^1 (C_4^1 C_2^1) + \frac{(C_4^2 C_2^1) \cdot C_2^1}{A_2^2} = 44$ (种),

恰好能围成两个圈的概率 $P = \frac{44}{105}$.

② $n = 1, a_1 = 1, n \geq 2, a_n = (2n - 2) a_{n-1}, \therefore a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \cdots \times$

$\frac{a_2}{a_1} \times a_1 = (2n - 2) \times (2n - 4) \times \cdots \times 2 \times 1 = 2^{n-1} \times (n - 1)!,$

当 $n = 1$ 时, 也适合上式, $\therefore \frac{n!}{a_n} = \frac{n}{2^{n-1}},$

$\therefore T_n = \sum_{i=1}^n \frac{i!}{a_i} = \frac{1!}{a_1} + \frac{2!}{a_2} + \frac{3!}{a_3} + \cdots + \frac{n!}{a_n} = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots +$

$\frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} \text{ ①},$

$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \text{ ②},$

由 ① - ②, 得 $\frac{1}{2} T_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n},$

$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n}, \therefore T_n = 4 - (4 + 2n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 - \frac{2+n}{2^{n-1}}.$

12. 【解】(1) 零假设 H_0 : 是否喜欢排球与性别无关联.

根据表中的数据, 经计算得到 $\chi^2 = \frac{400 \times (78 \times 88 - 122 \times 112)^2}{(78 + 122) \times (112 + 88) \times (78 + 112) \times (122 + 88)} = \frac{4\,624}{399} \approx$

$11.589 > 10.828 = \chi_{0.001},$

所以依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 可以认为是是否喜欢排球与性别有关联.

(2) ① 由题意, 知 $p_1 = \frac{1}{2}, p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n) + 0 \cdot p_n = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}.$



设 $p_{n+1} + \lambda = -\frac{1}{2}(p_n + \lambda)$, 所以 $p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n - \frac{3}{2}\lambda$,

所以 $-\frac{3}{2}\lambda = \frac{1}{2}$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{3}$,

所以 $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$.

又 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 故数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 所以 $p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 即第 n 次传球后球在乙手中的概率为 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

② 因为 $p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 所以当 $n \in \mathbf{N}^*$

时, Y 的数学期望 $E(Y) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{3} + \frac{\frac{1}{6} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{n}{3} + \frac{1}{9} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{3n+1}{9} - \frac{1}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, 即 Y 的数学期望为 $\frac{3n+1}{9} - \frac{1}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

13. 【解】 (1) $X=1$ 表示第一次就生成 A 并结束过程, 即第一次预测为 A , 且审核后生成 A , 故 $P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$X=2$ 表示第二次生成 A 并结束过程, 有两种可能的情况: 一种是第一次预测为 A , 但审核后生成 B , 第二次预测为 A ; 另一种是第一次预测为 B , 审核后生成 B , 第二次预测为 A , 且审核后生成 A .

故 $P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

(2) 设当 $X=k$ ($2 \leq k \leq 2n-1, k \in \mathbf{N}^*$) 时, 第 k 个词元输出为 A , 若前面 $(k-1)$ 个词元都预测为 B , 则此时 $P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, 若前面 $(k-1)$ 个词元有一个预测为 A , 则此时 $P(X=k) = C_{k-1}^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{2} = (k-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, 故 $P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

当 $X=2n$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 时, 若前面 $(2n-1)$ 个词元都没有预测为 A , 则其概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$, 若前面 $(2n-1)$ 个词元有一个预测为 A 且审核后生成 B , 则其概率为 $(2n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, 故 $P(X=2n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + (2n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.



又由(1)可知 $P(X=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	...	$2n-1$	$2n$
P	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$	...	$(2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$	$(2n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

(3) 由(1)得 $P(X=2) = \frac{1}{4}$, 由(2)得 $P(X=k) = k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

$(2 \leq k \leq 2n-1, k \in \mathbf{N}^*)$,

$$P(X \leq n) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{①},$$

$$\frac{1}{2}P(X \leq n) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \text{②},$$

由①-②, 得 $\frac{1}{2}P(X \leq n) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots +$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{2}} - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{2} -$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{n}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

所以 $P(X \leq n) = 1 - (n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, 所以 $P(X=2 | X \leq n) =$

$$\frac{P(X=2)}{P(X \leq n)} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - (n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n+1} - n - 2}.$$

14. 【解】(1) 设甲的位置固定, 若乙要与甲在第一轮相遇只能在同一组, 所以甲、乙在第一轮相遇的概率 $P_1 = \frac{1}{7}$.

(2) 由题可知, 甲、乙相遇包括三种情况: 甲、乙在第一轮相遇, 甲、乙在第二轮相遇, 甲、乙在第三轮相遇, 其概率分别为 P_1, P_2, P_3 .

甲、乙要在第二轮相遇, 则甲、乙在同一个半区, 但不在同一组的概率为 $\frac{2}{7}$, 同时甲、乙在第一轮都要获胜, 则 $P_2 = \frac{2}{7} \times$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{14};$$

甲、乙要在第三轮相遇, 则甲、乙不在同一个半区, 概率为 $\frac{4}{7}$, 同时甲、乙在第一、二轮都要获胜, 则 $P_3 = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} =$

$$\frac{1}{28}.$$

所以甲、乙相遇的概率 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}$.

(3) ①人数增加到 2^n , 则固定甲的位置后, 乙有 $2^n - 1$ 个选



择,要使得甲、乙能在第三轮相遇,由(2)可知甲、乙必须得在按照顺序每 8 个人组成的同一个区内,且甲、乙分别在该区内的前 4 位和后 4 位,概率为 $\frac{4}{2^n-1}$,

同时甲、乙在第一、二轮都要获胜,则甲、乙两人在第 3 轮比赛中相遇的概率为 $P = \frac{4}{2^n-1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4(2^n-1)}$.

②记比赛的轮次为事件 $A_k (k=1, 2, 3, \dots, n)$, 甲、乙在比赛过程中相遇的事件为 B ,

要使得甲、乙能在第 k 轮相遇,则甲、乙必须得在按照顺序每 2^k 个人组成的同一个区内,且甲、乙分别在该区内的前 2^{k-1} 位和后 2^{k-1} 位,概率为 $\frac{2^{k-1}}{2^n-1}$,同时甲、乙在前 $(k-1)$ 轮都要获胜,所以 $P(A_k B) = \frac{2^{k-1}}{2^n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^n-1} \times$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$, 所以甲、乙相遇的概率为 $P(B) = \frac{1}{2^n-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^n-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

要使得甲、乙相遇的概率小于 0.01, 即 $\frac{1}{2^{n-1}} < 0.01$, 即 $2^{n-1} > 100$, 又因为 n 为整数, 所以 $n-1 \geq 7$, 所以 n 的最小值为 8.

一题多解 (3)②设 2^n 名选手参赛, 甲、乙相遇的概率为 P_n , 则当 $n=1$ 时, 甲、乙一定相遇, 此时 $P_1 = 1$.

当 $n>1$ 时, 考虑将 2^n 个选手分成上下两个区, 每区 2^{n-1} 名选手, 这时有两种情况.

情形一: 乙和甲在同一区, 此时甲、乙相遇的概率为 P_{n-1} ,

情形二: 乙和甲不在同一区, 两人相遇必须都进入决赛, 即前 $(n-1)$ 轮比赛均获胜,

所以 $P_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} \times P_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \times \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$, 于是 $(2^n-1)P_n =$

$(2^{n-1}-1) \times P_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, (2^2-1)P_2 = (2^1-1) \times P_1 + \frac{1}{2^1}$,

累加得 $(2^n-1)P_n = P_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, 所以

$P_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

令 $\frac{1}{2^{n-1}} < 0.01$, 则 $2^{n-1} > 100$. 因为 n 为正整数, 所以 n 的最小值为 8.

15. ACD 【解析】对于 A, 因为 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$, $P(\xi > 3) = a$, $P(1 < \xi < 2) = b$, 由正态密度曲线的对称性, 可得 $a = P(\xi > 3) = P(\xi < 1)$, 故 $P(\xi < 1) + P(1 < \xi < 2) = a + b = \frac{1}{2}$, 故 A 正确;

对于 B, 由题意可知 $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b +$



$2\sqrt{ab} \leq 2(a+b) = 1$, 故 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 1$, 当且仅当 $\begin{cases} a=b, \\ a+b=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $a=b=\frac{1}{4}$ 时, 等号成立, 故 **B** 错误;

对于 C, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$, 故 $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} =$

$\frac{1}{8}$, 当且仅当 $\begin{cases} a=b, \\ a+b=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $a=b=\frac{1}{4}$ 时, 等号成立, 故 **C** 正

确;

对于 D, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 \left(2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \geq$

$2 \left(2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} \right) = 8$, 当且仅当 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \\ a+b = \frac{1}{2}, \\ 0 < a < \frac{1}{2}, \\ 0 < b < \frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $a=b=\frac{1}{4}$ 时,

等号成立, 故 **D** 正确. 故选 ACD.

16. C 【解析】由题意得 $E(\xi_1) = 0.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$,

$E(\xi_2) = 0.2 \times \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \frac{x_4 + x_5}{2} + \frac{x_5 + x_1}{2} \right) = 0.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$,

故 $E(\xi_1) = E(\xi_2)$. 记 $\bar{x} = E(\xi_1) = E(\xi_2)$,

则 $D(\xi_1) = 0.2[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_5 - \bar{x})^2]$

$= 0.2[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 + 5\bar{x}^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\bar{x}]$

$= 0.2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 - 5\bar{x}^2)$.

同理 $D(\xi_2) = 0.2 \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_5 + x_1}{2} \right)^2 - 5\bar{x}^2 \right]$.

因为 $10 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \leq 50$,

所以 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \dots, \left(\frac{x_5 + x_1}{2} \right)^2 < \frac{x_5^2 + x_1^2}{2}$,

故 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_5 + x_1}{2} \right)^2 < x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2$,

即 $D(\xi_1) > D(\xi_2)$, $D(\xi_1)$ 与 $D(\xi_2)$ 的大小关系与 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的取值无关. 故选 C.

17. ACD 【解析】对于 A, 分析: 通过二项分布计算 3 次采集中至少 2 次检测为 1 的概率, 推导出递推式. 设 3 次采集中检测为 1 的次数为 X , 则 X 服从二项分布, 故 $p_{n+1} = C_3^2 p_n^2 (1 - p_n) + C_3^3 p_n^3 (1 - p_n)^0$, 即 $p_{n+1} = 3p_n^2 - 2p_n^3$, 故 **A** 正确.

对于 B, 分析: 通过取 $p_n = 0.9$ 举出反例. 设 $p_n = 0.9$, 则 $p_{n+1} = 3 \times 0.9^2 - 2 \times 0.9^3 = 0.972$, 故 $p_{n+1} - p_n = 0.972 - 0.9 = 0.072$, 若 $2p_{n+1} < p_{n+2} + p_n$, 则 $p_{n+1} - p_n < p_{n+2} - p_{n+1}$, 即要求 $p_{n+2} - p_{n+1} > 0.072$, 则必须有 $p_{n+2} > p_{n+1} + 0.072 = 1.044$, 不符合题意, 故 **B** 错误.



对于 C, $p_{n+1} - \frac{1}{2} = 3p_n^2 - 2p_n^3 - \frac{1}{2} = \left(p_n - \frac{1}{2}\right) \cdot (-2p_n^2 + 2p_n + 1)$. 易知当 $p_n \in (0, 1)$ 时, $-2p_n^2 + 2p_n + 1 > 0$ 恒成立, 故当 $p_1 > \frac{1}{2}$ 时, $p_n > \frac{1}{2}$, 故 C 正确.

对于 D, 若 $p_{n+1} < \frac{3}{2}p_n$, 则 $3p_n^2 - 2p_n^3 < \frac{3}{2}p_n$, 由 $p_n \in (0, 1)$, 即 $3p_n - 2p_n^2 < \frac{3}{2}$, 也即 $2p_n^2 - 3p_n + \frac{3}{2} > 0 = 2\left(p_n - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}$, 显然成立, 故 D 正确. 故选 ACD.

18. (1) 【解】若该题恰有 2 个正确选项的概率 $p = \frac{2}{3}$, 则恰有 3

个正确选项的概率为 $1 - p = \frac{1}{3}$.

当该题有 2 个正确选项时, 甲随机选择 1 个选项且为正确选项, 此时得 3 分, 概率为 $\frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$;

当该题有 3 个正确选项时, 甲随机选择 1 个选项且为正确选项, 此时可得 2 分, 概率为 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

因此 $P(X \geq 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.

(2) 【解】由题知, X 的所有可能取值为 0, 2, 3,

$$P(X=0) = (1-p) \times \frac{1}{4} + p \times \frac{2}{4} = \frac{1+p}{4},$$

$$P(X=2) = (1-p) \times \frac{3}{4} = \frac{3-3p}{4},$$

$$P(X=3) = p \times \frac{2}{4} = \frac{p}{2}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	2	3
P	$\frac{1+p}{4}$	$\frac{3-3p}{4}$	$\frac{p}{2}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1+p}{4} + 2 \times \frac{3-3p}{4} + 3 \times \frac{p}{2} = \frac{3}{2}.$$

(3) 【证明】由题知, Y 的所有可能取值为 0, 4, 6,

$$P(Y=0) = (1-p) \times \frac{C_3^1 C_1^1}{C_4^2} + p \times \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{2} + \frac{p}{3},$$

$$P(Y=4) = (1-p) \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2} - \frac{p}{2},$$

$$P(Y=6) = p \times \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{p}{6}.$$

$$\text{故 } Y \text{ 的数学期望 } E(Y) = 0 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{3}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right) + 6 \times \frac{p}{6} = 2 - p.$$

$$E(Y) - E(X) = 2 - p - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - p,$$

故当且仅当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时, $E(Y) > E(X)$.



19. 【解】(1) 依题意可知甲第 1 次射击未命中, 乙第 1 次射击未命中, 甲第 2 次射击命中, 所以 $p = (1-\alpha)(1-\beta)\alpha$.

(2) 设乙先射击并获胜的概率为 P_Z , 甲获胜的概率为 $P_{\text{甲}}$. 乙获胜的情况为:

乙第 1 次射击并命中, 概率为 β .

第一轮甲、乙均未命中, 乙第 2 次射击命中, 概率为 $(1-\beta)(1-\alpha)\beta$.

前两轮甲、乙均未命中, 乙第 3 次射击命中, 概率为 $[(1-\beta)(1-\alpha)]^2\beta$.

.....

前 n 轮甲、乙均未命中, 乙第 $(n+1)$ 次射击命中, 概率为 $[(1-\beta)(1-\alpha)]^n\beta$.

.....

所以 P_Z 是首项为 β , 公比为 $(1-\beta)(1-\alpha)$ 的无穷等比数列的各项之和, 又 $0 < (1-\beta)(1-\alpha) < 1$, 所以 $P_Z =$

$$\frac{\beta}{1-(1-\beta)(1-\alpha)}.$$

甲获胜的情况为:

第一轮乙未命中, 甲命中, 概率为 $(1-\beta)\alpha$.

第一轮甲、乙均未命中, 第二轮乙未命中, 甲命中, 概率为 $(1-\beta)(1-\alpha) \cdot (1-\beta)\alpha$.

前两轮甲、乙均未命中, 第三轮乙未命中, 甲命中, 概率为 $[(1-\beta)(1-\alpha)]^2 \cdot (1-\beta)\alpha$.

.....

前 $(n-1)$ 轮甲、乙均未命中, 第 n 轮乙未命中, 甲命中, 概率为 $[(1-\beta)(1-\alpha)]^{n-1} \cdot (1-\beta)\alpha$.

.....

所以 $P_{\text{甲}}$ 是首项为 $(1-\beta)\alpha$, 公比为 $(1-\beta)(1-\alpha)$ 的无穷等比数列的各项之和, 所以 $P_{\text{甲}} = \frac{(1-\beta)\alpha}{1-(1-\beta)(1-\alpha)}.$

由题意知, $P_Z > P_{\text{甲}}$ 恒成立, 即 $\frac{\beta}{1-(1-\beta)(1-\alpha)} >$

$\frac{(1-\beta)\alpha}{1-(1-\beta)(1-\alpha)}$ 恒成立,

因为 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, 所以 $1-(1-\beta)(1-\alpha) > 0$,

所以 $\beta > (1-\beta)\alpha$ 恒成立, 即 $\beta > \frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - \frac{1}{1+\alpha}$ 恒成立.

由 $0 < \alpha < 1$, 得 $1 < 1+\alpha < 2, 0 < 1 - \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{2}$, 所以 $\beta \geq \frac{1}{2}$,

所以 β 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

20. (1) 【解】 X 的所有可能取值为 1, 3, 5,

$$\text{则 } P(X=1) = C_5^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 = \frac{5}{8},$$

$$P(X=3) = C_5^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{5}{16},$$

$$P(X=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 2 = \frac{1}{16},$$

所以 X 的分布列为



X	1	3	5
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 1 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{5}{16} + 5 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{8}.$$

(2)【解】当 $0 \leq k \leq n-2$ 时, $k < k+1 < k+2 \leq n < \frac{2n+1}{2}$, 故乙最终

获胜, 则 $P(B | \sum_{k=0}^{n-2} A_k) = 0$.

当 $k = n-1$ 时, $k < k+1 = n < \frac{2n+1}{2}$, $k+2 = n+1 > \frac{2n+1}{2}$, 故只有最后

2 局比赛甲全赢才能最终获胜, 故 $P(B | A_{n-1}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

当 $k = n$ 时, $k = n < \frac{2n+1}{2}$, $k+2 > k+1 = n+1 > \frac{2n+1}{2}$, 最后 2 局比

赛甲至少赢 1 局才能最终获胜, 故 $P(B | A_n) = C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} +$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

当 $n+1 \leq k \leq 2n-1$ 时, $k+2 > k+1 > k \geq n+1 > \frac{2n+1}{2}$, 故甲一定能

最终获胜, 故 $P(B | \sum_{k=n+1}^{2n-1} A_k) = 1$.

(3)【证明】结合(2), 由全概率公式得

$$P_{n+1} = C_{2n-1}^{n-1} p^{n-1} (1-p)^n \cdot p^2 + C_{2n-1}^n p^n (1-p)^{n-1} \cdot [1 - (1-p)^2] + [P_n - C_{2n-1}^n p^n (1-p)^{n-1}]$$

$$= P_n + C_{2n-1}^{n-1} p^{n-1} (1-p)^n \cdot p^2 - C_{2n-1}^n p^n (1-p)^{n-1} \cdot (1-p)^2$$

$$= P_n + C_{2n-1}^n p^{n+1} (1-p)^n - C_{2n-1}^n p^n (1-p)^{n+1}$$

$$= P_n + C_{2n-1}^n p^n (1-p)^n (2p-1),$$

$$\text{所以 } P_{n+1} - P_n = C_{2n-1}^n p^n (1-p)^n (2p-1),$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} < p < 1 \text{ 时, } P_{n+1} - P_n > 0, \text{ 又 } \frac{P_{n+2} - P_{n+1}}{P_{n+1} - P_n} =$$

$$\frac{C_{2n+1}^{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+1} (2p-1)}{C_{2n-1}^n p^n (1-p)^n (2p-1)} = \frac{C_{2n+1}^{n+1} p (1-p)}{C_{2n-1}^n} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)! n!} p (1-p) = \frac{(2n-1)!}{n! (n-1)!} =$$

$$\frac{4n+2}{n+1} p (1-p) < 4p (1-p) < 4 \left[\frac{p + (1-p)}{2} \right]^2 = 1, \text{ 所以 } P_{n+2} - P_{n+1} <$$

$$P_{n+1} - P_n.$$

真题风向练

21. 命题点 ⊙ 二项分布

(1)【解】第一步: 求 p_3 .

设事件 A : 打完 3 个球后, 甲比乙多得 3 分, 即甲赢了 3 个球, 则 $P(A) = p^3$,

则 $p_3 = p^3$ 2 分

第二步: 把 p_4 拆分成多个事件, 并求这些事件的概率.

设事件 B : 打完 4 个球后, 甲比乙多得 2 分, 即甲赢了 3 个球, 输了 1 个球, 则 $P(B) = C_4^3 p^3 (1-p)$,

设事件 C : 打完 4 个球后, 甲比乙多得 4 分, 即甲赢了 4 个



球, 则 $P(C) = p^4$ 4 分

第三步: 求 p_4 .

则 $p_4 = P(B) + P(C) = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p)$ 6 分

(2) 【解】第一步: 求出 q_4, q_3 .

易知 $q_4 = 4(1-p)^3p + (1-p)^4 = (1-p)^3(3p+1)$, $q_3 = (1-p)^3$,
..... 8 分

第二步: 代入已知等式化简并求值.

$$\text{因此 } \frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{3p^3(1-p)}{3p(1-p)^3} = \frac{p^2}{(1-p)^2} = 4,$$

解得 $p = 2$ (舍去) 或 $p = \frac{2}{3}$ 10 分

(3) 【证明】第一步: 得出 p_{2m+2} 与 p_{2m+1} , q_{2m+2} 与 q_{2m+1} , p_{2m+1} 与 p_{2m} , q_{2m+1} 与 q_{2m} 的关系.

$$\text{易知 } p_{2m+2} = p_{2m+1} + pC_{2m+1}^{m+1}p^{m+1}(1-p)^m,$$

$$q_{2m+2} = q_{2m+1} + qC_{2m+1}^{m+1}q^{m+1}p^m,$$

$$p_{2m+1} = p_{2m} - (1-p)C_{2m}^{m+1}p^{m+1}(1-p)^{m-1},$$

$$q_{2m+1} = q_{2m} - pC_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^{m-1},$$

第二步: 作商法证 $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}$.

$$\text{则 } \frac{p_{2m+1} - p_{2m}}{q_{2m+1} - q_{2m}} = \frac{-C_{2m}^{m+1}(1-p)^m p^{m+1}}{-C_{2m}^{m+1}(1-p)^{m+1} p^m} = \frac{p}{1-p} > 1,$$

$$\text{则 } p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m},$$

即 $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}$ 13 分

第三步: 作差法证 $p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}$.

$$\begin{aligned} & (p_{2m+2} - p_{2m}) - (q_{2m+2} - q_{2m}) \\ &= C_{2m+1}^{m+1}p^{m+2}q^m - C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m - (C_{2m+1}^{m+2}q^{m+2}p^m - C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m) \\ &= C_{2m+1}^{m+1}p^{m+2}q^m - C_{2m+1}^{m+1}q^{m+2}p^m - (C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m - C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m) \\ &= C_{2m+1}^{m+1}p^m q^m (p^2 - q^2) - C_{2m}^{m+1}p^m q^m (p - q) \\ &= C_{2m+1}^{m+1}p^m q^m (p - q) - C_{2m}^{m+1}p^m q^m (p - q) \\ &= p^m q^m (p - q) (C_{2m+1}^{m+1} - C_{2m}^{m+1}) > 0, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m},$$

$$\text{即 } p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}.$$

综上, $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$ 17 分

一题多解 (3) 第一步: 找 p_{2m+1} 与 p_{2m} , q_{2m+1} 与 q_{2m} 的关系.

先考虑 p_{2m+1} 与 p_{2m} 的关系, 令 X_n 表示打 n 个球后甲的得分, 则若打 $2m$ 个球后有 $X_{2m} \geq m+2$, 那无论如何都会有 $X_{2m+1} \geq m+2$; 如果 $X_{2m} = m+1$, 那么需要最后一个球甲得分, 才能使得 $X_{2m+1} \geq m+2$; 如果 $X_{2m} < m+1$, 那无论如何都不能得到 $X_{2m+1} \geq m+2$, 因此 $p_{2m+1} = P(X_{2m+1} \geq m+2) = P(X_{2m+1} \geq m+2 | X_{2m} \geq m+2) \cdot P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m+1} \geq m+2 | X_{2m} = m+1)P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1)p = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1) - P(X_{2m} = m+1)q = p_{2m} - C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m,$

同理有 $q_{2m+1} = q_{2m} - C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m$, 12 分

第二步: 证明左边不等式.

$$\begin{aligned} p_{2m+1} - q_{2m+1} &= p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m - C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m = p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1} \cdot \\ & (pq)^m (q - p) < p_{2m} - q_{2m}. \end{aligned} \text{ 13 分}$$



第三步:找 p_{2m+2} 与 p_{2m}, q_{2m+2} 与 q_{2m} 的关系.

先考虑 p_{2m+2} 与 p_{2m} 的关系,当已经有 $X_{2m} \geq m+2$ 时,无论如何都会有 $X_{2m+2} \geq m+2$;当 $X_{2m} = m+1$ 时,只要保证接下来甲不连输两球即可;当 $X_{2m} = m$ 时,接下来甲必须赢两球;当 $X_{2m} < m$ 时,无论如何都不符合要求,因此 $p_{2m+2} = P(X_{2m+2} \geq m+2) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m)p^2 + P(X_{2m} = m+1)[1 - (1-p)^2] = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m) + P(X_{2m} = m+1) + (p^2 - 1)P(X_{2m} = m) - (1-p)^2 P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m) + (p^2 - 1)C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1} = p_{2m} + P(X_{2m} = m) + (p^2 - 1)C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1},$

同理 $q_{2m+2} = q_{2m} + P(X_{2m} = m) + (q^2 - 1)C_{2m}^m q^m p^m - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^{m+1},$
..... 16 分

第四步:证明右边不等式.

因此 $p_{2m+2} - q_{2m+2} = p_{2m} - q_{2m} + (p^2 - q^2)C_{2m}^m p^m q^m > p_{2m} - q_{2m}.$

综上, $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}.$ 17 分

第2章 ▶ 真题综合测试

题组 1

1. B 命题点 ⊙ 中位数的概念

【解析】将数据 6, 8, 4, 5, 12 按从小到大的顺序依次排列得 4, 5, 6, 8, 12. 数据的个数为奇数, 中位数即为最中间的第 3 个数 6. 故选 B.

2. C 命题点 ⊙ 频率分布直方图的应用与数据分析

【解析】由频率分布直方图知年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 $(0.02 + 0.04) \times 1 = 0.06 = 6\%$, 故 A 正确;

年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 $(0.04 + 0.02 \times 3) \times 1 = 0.10 = 10\%$, 故 B 正确;

该地农户家庭年收入的平均值约为 $3 \times 0.02 + 4 \times 0.04 + 5 \times 0.10 + 6 \times 0.14 + 7 \times 0.20 + 8 \times 0.20 + 9 \times 0.10 + 10 \times 0.10 + 11 \times 0.04 + 12 \times 0.02 + 13 \times 0.02 + 14 \times 0.02 = 7.68 > 6.5$, 故 C 错误;

年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间的农户比率约为 $(0.10 + 0.14 + 0.20 + 0.20) \times 1 = 0.64 > 0.5$, 故 D 正确.

故选 C.

3. D 命题点 ⊙ 古典概型概率的计算

【解析】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 共有 $C_7^2 = 21$ (种) 不同的结果, 这 2 个数互质的情况有 $\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}$, 共 14 种, 所以这 2 个数互质的概率 $P = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. 故选 D.

4. B 命题点 ⊙ 相互独立事件的判断

【解析】由题意可知, 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”, 记为 $(1, i), i = 1, 2, \dots, 6$;

乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”, 记为 $(j, 2), j = 1,$

$2, \dots, 6$; 丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”, 记为



$(m, n), m, n = 1, 2, \dots, 6$ (提示: 注意是“有放回”), 且 $m+n=8$;

丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”, 记为 $(p, q), p,$

$q = 1, 2, \dots, 6$, 且 $p+q=7$, 则 $P(\text{甲}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(\text{乙}) = \frac{6}{36} =$

$\frac{1}{6}, P(\text{丙}) = \frac{5}{36}, P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$

$P(\text{甲丙}) = 0, P(\text{甲丁}) = \frac{1}{36}, P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36}, P(\text{丙丁}) = 0,$

故 $P(\text{甲丁}) = P(\text{甲})P(\text{丁})$ (提示: 若事件 A, B 满足 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, 则事件 A, B 相互独立). 故选 B.

5. BD 命题点 ④ 样本的数字特征

【解析】对于选项 A: $\because x_1, x_6$ 不确定, $\therefore x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均数不确定, 如 $1, 2, 2, 2, 2, 4$ 的平均数不等于 $2, 2, 2, 2$ 的平均数, 故 A 错误;

对于选项 B: 不妨设 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, 则 x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数为 $\frac{x_3+x_4}{2}$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的中位数为 $\frac{x_3+x_4}{2}$, 故 B 正确;

对于选项 C: $\because x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的波动性不小于 x_2, x_3, x_4, x_5 的波动性, $\therefore x_2, x_3, x_4, x_5$ 的标准差不大于 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的标准差 (提示: 标准差反映数据的离散程度, 数据越离散, 标准差越大), 故 C 错误;

对于选项 D: 不妨设 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, 则 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$, $\therefore x_5 - x_2 \leq x_6 - x_1$, 即 x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的极差, 故 D 正确. 故选 BD.

6. A 命题点 ④ 离散型随机变量的数学期望

【解析】由题知 $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$, 则 X 的所有可能取值为 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$

由对称性可得相应概率为 $\frac{k_1}{63}, \frac{k_2}{63}, \frac{k_3}{63}, \frac{k_4}{63}, \frac{k_5}{63}, \frac{k_6}{63}, \frac{k_7}{63}, \frac{k_6}{63},$

$\frac{k_5}{63}, \frac{k_4-1}{63}, \frac{k_3}{63}, \frac{k_2}{63}, \frac{k_1}{63} (k_i \in \mathbb{N}^*, i=1, 2, 3, \dots, 7)$ (提示: 需要去

掉点 $(1, 1, 1)$), 则 $E(X) = 0 - \frac{3}{63} = -\frac{1}{21}$. 故选 A.

一题多解 由题意, 集合 U 中包含的点的总数为 64.

由集合 $\{-2, -1, 1, 2\}$ 可知 U 中所有点的坐标之和为 0.

点 $P(1, 1, 1)$ 的坐标之和为 $1+1+1=3$, 样本空间 $\Omega = \complement_U \{P\}$ 共包含 $64-1=63$ (个) 点, 故 Ω 中所有点的坐标之和

为 $\sum_{A \in \Omega} X(A) = 0 - 3 = -3$, 则 X 的数学期望 $E(X) = \frac{-3}{63} =$

$-\frac{1}{21}$.

7. $\frac{3}{10}$ 命题点 ④ 计数原理和古典概型

【解析】从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作的情况有 $C_5^3 = 10$ (种), 甲、乙都入选的情况有 $C_2^2 C_3^1 = 3$ (种),

所以甲、乙都入选的概率 $P = \frac{3}{10}$.

8. $\frac{61}{25}$ **命题点** 离散型随机变量的分布列与数学期望

【解析】由题意得 $X=1, 2, 3$ (关键: $X=1$ 表示三次取出的都是同一个数字的球, $X=2$ 表示三次取出了两个不同数字的球, $X=3$ 表示三次取出的球的数字各不相同).

$$P(X=1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{5}{125}; P(X=3) = A_5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125} \text{ (提示: 选出 3 个不同数字的小球并排序);}$$

$$P(X=2) = C_5^2 \times 2 \times \frac{A_3^3}{A_2^2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125} \text{ (提示: 假设所取球的数字}$$

为 1 和 2, 式中“2”表示两种组合“1, 1, 2”和“1, 2, 2”, “ $\frac{A_3^3}{A_2^2}$ ”

表示“除序”)

$$\left(\text{另解: } P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3) = \right.$$

$$\left. \frac{60}{125} \right).$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{5}{125} + 2 \times \frac{60}{125} + 3 \times \frac{60}{125} = \frac{61}{25}.$$

一题多解

$$\text{令 } X_i = \begin{cases} 1, \text{球 } i \text{ 至少被取出一次,} \\ 0, \text{球 } i \text{ 没被取出过,} \end{cases} \text{ 则 } X = X_1 + X_2 +$$

$$X_3 + X_4 + X_5,$$

$$E(X_i) = P(\text{球 } i \text{ 至少被取出一次}) = 1 - P(\text{球 } i \text{ 没被取出过}) =$$

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}.$$

$$\text{故 } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) = 5 \times \frac{61}{125} = \frac{61}{25}.$$

9. **命题点** 样本平均数与方差

【解】(1) 因为 $z_i = x_i - y_i (i = 1, 2, \dots, 10)$,

所以 $z_1 = 9, z_2 = 6, z_3 = 8, z_4 = -8, z_5 = 15, z_6 = 11, z_7 = 19, z_8 = 18,$

$z_9 = 20, z_{10} = 12, \dots \dots \dots$ 4 分

$$\text{所以 } \bar{z} = \frac{1}{10} \times (9+6+8-8+15+11+19+18+20+12) = 11, \dots \dots \dots$$
 6 分

$$\text{所以 } s^2 = \frac{1}{10} \times (4+25+9+361+16+0+64+49+81+1) = 61. \dots \dots \dots$$
 8 分

$$(2) \text{ 因为 } 2\sqrt{\frac{s^2}{10}} = 2 \times \sqrt{\frac{61}{10}} = \sqrt{24.4} < 11, \text{ 即 } 2\sqrt{\frac{s^2}{10}} < \bar{z},$$

所以甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高. $\dots \dots \dots$ 12 分

10. **命题点** 相互独立事件的概率、离散型随机变量的分布列和期望

【解】(1) 记甲学校获得冠军的事件为 A , 则 $P(A) = 0.5 \times 0.4 \times (1-0.8) + 0.5 \times (1-0.4) \times 0.8 + (1-0.5) \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.6. \dots \dots \dots$ 4 分

(2) 依题意, X 的可能取值为 0, 10, 20, 30.

依题意, $P(X=0) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16,$

$$P(X=10) = 0.5 \times 0.4 \times (1-0.8) + 0.5 \times (1-0.4) \times 0.8 + (1-0.5) \times 0.4 \times 0.8 = 0.44,$$

$$P(X=20) = 0.5 \times (1-0.4) \times (1-0.8) + (1-0.5) \times (1-0.4) \times$$



$$0.8 + (1 - 0.5) \times 0.4 \times (1 - 0.8) = 0.34,$$

$$P(X=30) = (1 - 0.5) \times (1 - 0.4) \times (1 - 0.8) = 0.06, \dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

所以 X 的期望 $E(X) = 0 \times 0.16 + 10 \times 0.44 + 20 \times 0.34 + 30 \times 0.06 = 13. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

11. 命题点 ⊙ 相互独立事件、互斥事件的概率,数学期望

【解】(1) 从甲校抽取的 100 人中,有 80 人答对,用频率估计概率,估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率 $p = \frac{80}{100} =$

$$\frac{4}{5}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 第一步:写出 X 的取值及从乙校抽取 1 人答对该题的概率.

由题知, X 的所有可能取值为 0,1,2, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

从乙校随机抽取 1 人,答对该题目的概率 $P' = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \dots 5 \text{ 分}$

第二步:计算 X 取各个值时的概率.

$$\text{所以 } P(X=0) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5},$$

第三步:计算期望并下结论.

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{7}{20} + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{31}{20},$$

即 $X=1$ 的概率为 $\frac{7}{20}$, X 的数学期望为 $\frac{31}{20}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 第一步:用全概率公式列出关于 p_1, p_2 的等式.

该题做对分两种情况,一种是掌握知识点并做对,另一种是没有掌握但随机选一个对了,所以 $p_1 \times 100\% + (1 - p_1) \times \frac{1}{4} =$

$$\frac{4}{5}, p_2 \times 85\% + (1 - p_2) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

第二步:计算出 p_1, p_2 的值并比较大小.

解得 $p_1 = \frac{11}{15}, p_2 = \frac{5}{6}$, 所以 $p_2 > p_1. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

12. 命题点 ⊙ 独立性检验、条件概率的计算

(1) 【解】

	不够良好	良好	合计
病例组	40	60	100
对照组	10	90	100
合计	50	150	200



$$K^2 = \frac{200 \times (40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{100 \times 100 \times 50 \times 150} = 24 > 6.635, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$(2) \textcircled{1} \text{【证明】} R = \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)} \cdot \frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}} \cdot \frac{\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}} =$$

$$\frac{P(AB)}{P(A\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}B)} = \frac{\frac{P(AB)}{P(B)}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}} \cdot \frac{\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{B})}} = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)},$$

$$\text{所以 } R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\textcircled{2} \text{【解】由调查数据可得 } P(A|B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, P(A|\bar{B}) =$$

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{则 } P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = \frac{3}{5}, P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = \frac{9}{10},$$

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{所以 } R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \times \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}} = 6. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

13. 命题点 $\odot$ 概率统计与导数的综合应用

$$\begin{aligned} (1) \text{【解】由题意知 } E(X) &= 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 \\ &= 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 \\ &= 1. \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

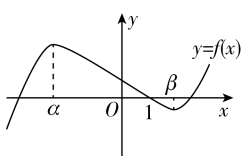
$$(2) \text{【证明】由题意知 } E(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 = p_1 + 2p_2 + 3p_3. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

设 $f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 - x$, 则 $f(p) = 0, f(0) = p_0 > 0$,
 $f(1) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 - 1 = 0, f'(x) = p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2 - 1$. 方程
 $f'(x) = 0$ 的判别式 $\Delta = 4p_2^2 - 4 \times 3p_3 \times (p_1 - 1) > 0$, 不妨设其两根
 分别为 α, β , 且 $\alpha < \beta$, 则由根与系数的关系得, $\alpha + \beta < 0, \alpha\beta <$
 0 , 则 $\alpha < p$, 且 $\alpha < 0 < \beta$, 且 $f'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 1 = E(X) - 1$.

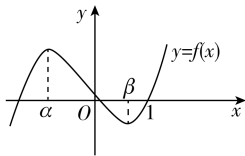
$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 $E(X) \leq 1$ 时, $f'(1) = E(X) - 1 \leq 0$,
 所以 $\alpha < 0 < 1 \leq \beta$, 故 $f(x) = 0$ 的最小正实根为 1, 即 $p = 1$ (如
 图①). $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

当 $E(X) > 1$ 时, $f'(1) = E(X) - 1 > 0$,
 所以 $\alpha < 0 < \beta < 1$, 又 $f(1) = 0$, 即存在 $x_0 \in (0, \beta)$ 使得 $f(x_0) =$
 0 (如图②), 即 $x_0 = p < 1$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$



图①



图②

(3)【解】由(2)可知,

当 $E(X) \leq 1$ 时, $p=1$, 即 1 个微生物个体繁殖下一代的个数期望不大于 1, 则该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率为 1, 即该微生物会灭绝. 11 分

当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$, 即 1 个微生物个体繁殖下一代的个数期望大于 1, 则该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率小于 1, 即该种微生物可通过多代繁殖而不至于灭绝.

..... 12 分

关键点拨 本题将概率统计与导数综合, 需要将统计问题转化为函数问题, 再利用导数研究函数的性质证明所需结论.

14. 必刷考点 ④ 概率统计与向量的综合应用

【解】(1) 由题意 $X_n \in \{1, 2\}$, 第 2 周开始时商品 A 不同供给

量的概率为 $P(X_2=1) = \frac{1}{2}, P(X_2=2) = 1 - P(X_2=1) = \frac{1}{2}$,

第 3 周开始时商品 A 不同供给量的概率为

$P(X_3=1) = P(X_3=1|X_2=1)P(X_2=1) + P(X_3=1|X_2=2) \cdot$

$P(X_2=2) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16},$

$P(X_3=2) = 1 - P(X_3=1) = \frac{11}{16}.$

所以第 3 周开始时商品 A 的供给量分布列为

X_3	1	2
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$

(2) ①记 D_n 为商品 A 第 n 周的需求量.

由题意, 得 X_n 与 D_n 的状态有关,

当 $n \geq 1$ 时, 若 $D_n < X_n$, 则 $X_{n+1} = X_n - D_n$;

若 $D_n \geq X_n$, 则 $X_{n+1} = 2$.

设 $\varphi_n = (x, 1-x)$, 即 $P(X_n=1) = x, P(X_n=2) = 1-x$,

由全概率公式, 可得 $P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{8}P(X_n=1) + \frac{1}{2}P(X_n=$

$2) = \frac{1}{8}x + \frac{1-x}{2}, P(X_{n+1}=2) = 1 - P(X_{n+1}=1) = \frac{7}{8}x + \frac{1-x}{2},$

由 $\varphi_n = \varphi_{n+1}$, 得 $\frac{1}{8}x + \frac{1-x}{2} = x, \frac{7}{8}x + \frac{1-x}{2} = 1-x$, 解得 $x = \frac{4}{11}$,

故 $\varphi = \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right)$.

②由①可知, 定常态分布 $\varphi = \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right)$, 所以从长远来看

$P(X_n=1) = \frac{4}{11}, P(X_n=2) = \frac{7}{11},$

记商品 A 需求大于供给的概率为 $P(D_n > X_n)$, 由全概率公式得 $P(D_n > X_n) = P(D_n > X_n | X_n=1)P(X_n=1) + P(D_n > X_n | X_n=$

$2)P(X_n=2) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} + \frac{1}{8} \times \frac{7}{11} = \frac{19}{88}.$



题组 2

1. A 命题点 ① 经验回归方程的应用

【解析】对于 A, 由经验回归方程 $\hat{y} = -1.17x + 1370.7$, 知 $\hat{b} = -1.17 < 0$, 所以 y 与 x 呈负相关, 故 A 正确; 对于 B, C, 当 $x = 10$ 时, $\hat{y} = -1.17 \times 10 + 1370.7 = 1359$, 但该值仅为预测值, 并非准确值, 故 B 错误, C 错误; 对于 D, 因为 $r = -0.91$, $|r|$ 接近 1, 说明两变量线性相关性强, 故 D 错误. 故选 A.

2. B 命题点 ② 相互独立事件的概率公式

【解析】 $\because$ 事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, \therefore$ 根据相互独立事件的概率公式, 可得 $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. 故选 B.

3. D 命题点 ③ 正态分布的性质

【解析】对于 A, σ 越小, 代表正态曲线越陡, 故 A 正确; 对于 B, 测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, 则正态曲线的对称轴为直线 $x = 10$, 故 B 正确; 对于 C, 结合正态曲线可知 $x = 10.01$ 与 $x = 9.99$ 关于对称轴 (直线 $x = 10$) 对称, 故 C 正确; 对于 D, 结合正态曲线可知, 区间 $(9.9, 10.2)$ 与 $(10, 10.3)$ 不关于对称轴 (直线 $x = 10$) 对称, 故 D 错误. 故选 D.

4. CD 命题点 ④ 样本数据同时加同一个数对平均数、中位数、标准差和极差的影响

【解析】对于选项 A, 因为原样本数据的样本平均数 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, 新样本数据的样本平均数 $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + c = \bar{x} + c$, 又 $c \neq 0$, 所以两组样本数据的样本平均数不相同, 故 A 错误;

对于选项 B, 设样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的中位数为 M , 则样本数据 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的中位数为 $M + c$, 又 $c \neq 0$, 所以两组样本数据的样本中位数不相同, 故 B 错误;

对于选项 C, 新样本数据的样本标准差 $s_y =$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2}{n}} = \\ & \sqrt{\frac{[(x_1 + c) - (\bar{x} + c)]^2 + [(x_2 + c) - (\bar{x} + c)]^2 + \cdots + [(x_n + c) - (\bar{x} + c)]^2}{n}} = \\ & \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = s_x, \text{ 故 C 正确;} \end{aligned}$$

对于选项 D, 设样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中, x_n 最大, x_1 最小, 因为 $y_i = x_i + c$, 所以样本数据 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中, y_n 最大, y_1 最小, 极差 $y_n - y_1 = (x_n + c) - (x_1 + c) = x_n - x_1$, 故 D 正确. 故选 CD.

方法速记 将一组数据中的每个数据都加或减同一个非零常数后, 样本平均数和中位数改变, 方差、标准差和极差不变.



5. BD 必刷考点 ⊙ 二项分布

【解析】当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 二项分布对称, 即 $P(\xi = k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

对于 A, 由二项式系数 $C_n^k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的对称性, 可知事件 A 发生的次数超过一半的概率 $P(B)$ 等于事件 A 发生的次数少于一半的概率. 因为 n 是奇数, 所以事件 A 发生的次数恰好等于一半的概率为 0, 因此 $P(B) = \frac{1}{2}$, 故 A 错误.

对于 B, 设 $n = 2m$ (m 为正整数), 则成功次数超过一半的条件为 $k > m$. 由于 $p = \frac{1}{2}$, 二项分布对称, 因此 $P(k > m) = P(k < m)$.

又 $P(k = m)$ 为中间项的概率, 因此总概率满足 $P(k > m) + P(k = m) + P(k < m) = 1$. 由于 $P(k > m) = P(k < m)$, 有 $2P(k > m) + P(k = m) = 1$, 即 $P(k > m) = \frac{1 - P(k = m)}{2}$, 由于 $P(k = m) > 0$, 因此 $P(B) < \frac{1}{2}$, 故 B 正确.

对于 C, 取 $n = 1$, $P(B) = P(k = 1) = p$, 取 $n = 3$, $P(B) = P(k = 2) + P(k = 3) = 3 \times p^2(1 - p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$, $3p^2 - 2p^3 - p = -p(2p^2 - 3p + 1)$, 当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时, $-p(2p^2 - 3p + 1) < 0$, 即 $3p^2 - 2p^3 - p < 0$, 故 C 错误.

对于 D, 当 n 为偶数时, 设 $n = 2m$, 其中 m 为正整数, 事件 A 发生的次数超过一半意味着 $k \geq m + 1$.

$$\text{设 } f(p) = P(B) = \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k p^k (1-p)^{2m-k},$$

$$f'(p) = \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k [kp^{k-1}(1-p)^{2m-k} - p^k(2m-k)(1-p)^{2m-k-1}]$$

$$= \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n C_n^k p^{k-1} (1-p)^{n-k-1} [k(1-p) - (n-k)p]$$

$$= \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n C_n^k p^{k-1} (1-p)^{n-k-1} (k - np).$$

当 $0 < p < \frac{1}{2}$, 且 $k \geq \frac{n}{2} + 1$ 时, $k - np \geq \frac{n}{2} + 1 - np$.

当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{n}{2} + 1 - np > \frac{n}{2} + 1 - n \cdot \frac{1}{2} = 1 > 0$.

因此 $k - np > 0$ 对于所有 $k \geq \frac{n}{2} + 1$ 成立.

由于 $k \geq m + 1$ 且 $0 < p < \frac{1}{2}$, 因此 $f'(p) > 0$, 即当 $0 < p < \frac{1}{2}$, n 为偶数时, $P(B)$ 随着 p 的增大而增大, 故 D 正确. 故选 BD.

6. $\frac{1}{221}$ $\frac{1}{17}$ 命题点 ⊙ 相互独立事件的概率及条件概率的计算

【解析】设第一次抽到 A 的事件为 M , 第二次抽到 A 的事件为 N , 则抽两次都是 A 的概率为 $P(MN) = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{13 \times 17} =$

$\frac{1}{221}$. 在第一次抽到 A 的条件下, 第二次也抽到 A 的概率是



$$P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{17}.$$

7. $\frac{7}{15}$ 命题点 ④ 排列组合与概率的综合

【解析】记取出的三个球上的数字按先后顺序分别为 a, b, c ,

则共有 $A_6^3 = 120$ (种) 可能. 由题知, $|m-n| = \left| \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3} \right| =$

$\left| \frac{a+b-2c}{6} \right| \leq 0.5$, 即 $|a+b-2c| \leq 3$, 所以 $2c-3 \leq a+b \leq 2c+3$, 其

中 (a, b) 的不同取法共有 $A_6^2 = 30$ (种), 对应的 $a+b$ 的取值如表所示. 根据对称性知, $c=1$ 或 6 时, 均有 2 种可能 (提示: $c=$

1 时, $a=2, b=3$ 或 $a=3, b=2$; $c=6$ 时, $a=4, b=5$ 或 $a=5, b=$

4); $c=2$ 或 5 时, 均有 10 种可能 (提示: $c=2$ 时, (a, b) 的值可

为 $(1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6,$

$1), (3, 4), (4, 3)$, 共 10 种情况, 同理可分析 $c=5$ 的情况);

$c=3$ 或 4 时, 均有 16 种可能 (提示: $c=3$ 时, (a, b) 的值可为

$(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1),$

$(2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 5), (5, 4),$

共 16 种情况, 同理可分析 $c=4$ 时的情况), 故满足条件的共

有 $2 \times 2 + 2 \times 10 + 2 \times 16 = 56$ (种) 可能, 故所求概率 $P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

$a+b$ 的取值表

b	a					
	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10	11	

8. 命题点 ⑤ 离散型随机变量的数学期望

【解】(1) 设一份保单索赔次数为 Y , 则

$$P(Y \geq 2) = P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) = \frac{60}{1\,000} + \frac{30}{1\,000} + \frac{10}{1\,000} = \frac{1}{10},$$

$\therefore$ 一份保单索赔次数不少于 2 的概率为 $\frac{1}{10}$ 3 分

(2) (i) X 的可能取值为 $0.4, -0.4, -1.2, -2, -2.6$, 则

$$P(X=0.4) = \frac{800}{1\,000} = \frac{4}{5}, P(X=-0.4) = \frac{100}{1\,000} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=-1.2) = \frac{60}{1\,000} = \frac{3}{50}, P(X=-2) = \frac{30}{1\,000} = \frac{3}{100},$$



$$P(X=-2.6) = \frac{10}{1\,000} = \frac{1}{100}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= 0.4 \times \frac{4}{5} - 0.4 \times \frac{1}{10} - 1.2 \times \frac{3}{50} - 2 \times \frac{3}{100} - 2.6 \times \frac{1}{100} \\ &= 0.32 - 0.04 - 0.072 - 0.06 - 0.026 \\ &= 0.122. \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

(ii) 保单的保费调整后, 无索赔保单的保费为 0.384 万元, 有索赔保单的保费为 0.48 万元.

毛利润 X' 的可能取值为 0.384, -0.32, -1.12, -1.92, -2.52,

$$\begin{aligned} \therefore \text{此时 } E(X') &= 0.384 \times \frac{4}{5} - 0.32 \times \frac{1}{10} - 1.12 \times \frac{3}{50} - 1.92 \times \frac{3}{100} - \\ &2.52 \times \frac{1}{100} = 0.3072 - 0.032 - 0.0672 - 0.0576 - 0.0252 = \\ &0.1252, \end{aligned}$$

$\therefore$ 调整后的一份保单毛利润的数学期望估计值大于调整前的一份保单毛利润数学期望的估计值. $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

9. 命题点 ① 概率与独立性检验

【解】(1) 补全列联表如下:

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

$\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$K^2 = \frac{150 \times (26 \times 30 - 24 \times 70)^2}{50 \times 100 \times 96 \times 54} = \frac{75}{16} = 4.6875 > 3.841, 4.6875 <$$

6.635, 所以有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异, 没有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由题中数据知,

$$\bar{p} = \frac{96}{150} = 0.64, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.5 + 1.65 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{150}} = 0.5 + 1.65 \times \frac{0.5}{\sqrt{150}} \approx$$

$$0.5 + 1.65 \times \frac{0.5}{12.247} \approx 0.57. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又 $0.64 > 0.57$,

所以可以认为生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

10. 必刷考点 ② 样本相关系数、独立性检验

$$\text{【解】}(1) \bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, \bar{y} = \frac{8+10+13+25+24}{5} = 16,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= (-2) \times (-8) + (-1) \times (-6) + 0 \times (-3) + \\ &1 \times 9 + 2 \times 8 = 47, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10,$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 64 + 36 + 9 + 81 + 64 = 254,$$



$$\text{则 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{47}{\sqrt{10} \times \sqrt{254}} = \frac{47}{2\sqrt{635}} \approx 0.933 > 0.75, \text{ 故管理时间 } y \text{ 与土地使用面积 } x \text{ 线性相关.}$$

(2) 依题意, 表格如下.

	愿意参与管理	不愿意参与管理	合计
男性村民	150	50	200
女性村民	50	50	100
合计	200	100	300

零假设 H_0 : 村民的性别与参与管理的意愿无关.

$$\text{计算可得 } \chi^2 = \frac{300 \times (150 \times 50 - 50 \times 50)^2}{200 \times 100 \times 200 \times 100} = 18.75 > 10.828 = \chi_{0.001}.$$

依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为村民的性别与参与管理的意愿有关.

(3) 依题意, X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$, 从该县中随机抽取一位村民, 取到不愿意参与管理的男性村民的概率为 $\frac{1}{6}$,

$$\text{故 } P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72},$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{25}{72} + 2 \times \frac{5}{72} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{1}{2}.$$

一题多解 (3) 依题意, 从该县中随机抽取一位村民, 取到

不愿意参与管理的男性村民的概率为 $\frac{1}{6}$, 则 $X \sim$

$B\left(3, \frac{1}{6}\right)$, 故 $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

11. 命题点 ① 频率分布直方图、函数的解析式及最值

【解】(1) 设 X 为患病者指标, Y 为未患病者指标, 由患病者指标的频率分布直方图, 知 $p(c) = P(X \leq c) = (c - 95) \times 0.002 = 0.5\%$, 解得 $c = 97.5$,

则 $q(c) = P(Y > c) = (100 - 97.5) \times 0.010 + 5 \times 0.002 = 0.035 = 3.5\%$ 4 分



(2) 当 $95 \leq c \leq 100$ 时,

$$p(c) = (c-95) \times 0.002, q(c) = (100-c) \times 0.010 + 5 \times 0.002,$$

$$\text{所以 } f(c) = p(c) + q(c) = -0.008c + 0.82; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $100 < c \leq 105$ 时,

$$p(c) = 5 \times 0.002 + (c-100) \times 0.012, q(c) = (105-c) \times 0.002,$$

$$\text{所以 } f(c) = p(c) + q(c) = 0.01c - 0.98. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{综上所述, } f(c) = \begin{cases} -0.008c + 0.82, & 95 \leq c \leq 100, \\ 0.01c - 0.98, & 100 < c \leq 105. \end{cases}$$

由一次函数的单调性知, 函数 $f(c)$ 在 $[95, 100]$ 上单调递减,

在 $(100, 105]$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{所以 } f(c)_{\min} = f(100) = -0.008 \times 100 + 0.82 = 0.02. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

12. 命题点 ② 相互独立事件的概率、离散型随机变量的期望

【解】(1) 甲参加第一阶段比赛, 则该队进入第二阶段的概率

$$P_1 = 1 - (1-0.4)^3 = 0.784. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

第二阶段乙进行投篮, 则乙至少投中一次的概率

$$P_2 = 1 - (1-0.5)^3 = 0.875, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

故甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率 $P = 0.784 \times$

$$0.875 = 0.686. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) ①若甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分, 则第二阶段的 3 次投篮全中.

当甲参加第一阶段比赛时, 甲、乙所在队的比赛成绩为

$$15 \text{ 分的概率为 } P_3 = [1 - (1-p)^3] q^3, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

当乙参加第一阶段比赛时, 甲、乙所在队的比赛成绩为

$$15 \text{ 分的概率为 } P_4 = [1 - (1-q)^3] p^3, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{则 } P_3 - P_4 = [1 - (1-p)^3] q^3 - [1 - (1-q)^3] p^3 = 3pq(q-p)[p + q(1-p)].$$

因为 $1 \geq q > p > 0$, 所以 $q-p > 0$, 所以 $P_3 - P_4 > 0$, 即 $P_3 > P_4$,

故应该由甲参加第一阶段比赛. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

②若甲参加第一阶段比赛, 则设该队比赛成绩为 X 分, X 的

所有可能取值为 0, 5, 10, 15, 进入第二阶段的概率为 $1 - (1-p)^3$, 未进入第二阶段的概率为 $(1-p)^3$,

$$\text{则 } P(X=0) = (1-p)^3 + [1 - (1-p)^3] (1-q)^3,$$

$$P(X=5) = [1 - (1-p)^3] C_3^1 q(1-q)^2,$$

$$P(X=10) = [1 - (1-p)^3] C_3^2 q^2(1-q),$$

$$P(X=15) = [1 - (1-p)^3] q^3,$$

$$\text{则 } E(X) = 5 \times [1 - (1-p)^3] C_3^1 q(1-q)^2 + 10 \times [1 - (1-p)^3] C_3^2 q^2(1-q) + 15 \times [1 - (1-p)^3] q^3 = 15pq(p^2 - 3p + 3). \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

若乙参加第一阶段比赛, 则设该队的比赛成绩为 Y 分,

$$\text{同理可得 } E(Y) = 15pq(q^2 - 3q + 3),$$

$$\text{则 } E(X) - E(Y) = 15pq(p^2 - 3p - q^2 + 3q) = 15pq(p-q)(p+q-3).$$

因为 $1 \geq q > p > 0$, 所以 $pq > 0, p-q < 0, p+q-3 < 0$,

所以 $E(X) - E(Y) > 0$, 即 $E(X) > E(Y)$. $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

故应该由甲参加第一阶段的比赛. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$



13. 必刷考点 条件概率、二项分布

【解】(1) ①甲型部件的总数为 $6 \times 9 = 54$, 根据题中表格统计, 指标在 $[30, 60)$ 的甲型部件个数为 $7+7+7+6+8+7=42$, 故甲型部件的可靠度 $p = \frac{42}{54} = \frac{7}{9}$.

②一个甲型部件的可靠度为 p , 一个乙型部件的可靠度为 q , 且 $p+q = \frac{5}{3}$, 故乙型部件的可靠度为 $q = \frac{5}{3} - \frac{7}{9} = \frac{8}{9}$.

设“系统试验成功”为事件 A , “两个甲型部件同时正常工作”为事件 B , “两个甲型部件、两个乙型部件同时正常工作”为事件 C , “两个甲型部件、一个乙型部件同时正常工作”为事件 D , “一个甲型部件、两个乙型部件同时正常工作”为事件 E ,

$$\text{则 } P(C) = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{8^2 \times 7^2}{9^4}, P(D) = C_2^1 \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times$$

$$\frac{8}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{16 \times 7^2}{9^4}, P(E) = C_2^1 \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{28 \times 8^2}{9^4},$$

$$P(A) = P(C) + P(D) + P(E) = \frac{8^2 \times 7^2 + 16 \times 7^2 + 28 \times 8^2}{9^4},$$

$$P(AB) = P(C) + P(D) = \frac{8^2 \times 7^2 + 16 \times 7^2}{9^4},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{8^2 \times 7^2 + 16 \times 7^2}{8^2 \times 7^2 + 16 \times 7^2 + 28 \times 8^2} = \frac{35}{51}.$$

(2) 优化后系统可靠度提高了.

原因: 原系统需要四个部件正常工作或三个部件正常工作, 系统才能正常运行, 新系统除了在四个部件正常工作或三个部件正常工作时能正常运行以外, 只有两个部件正常工作, 系统也可能正常运行, 所以可靠度提高了.

按照这个优化方案安排原有的四个部件可以有两种方案:

方案一: ①②位置上放同型部件, ③④位置上放同型部件, 不妨设①②位置上放甲型部件, ③④位置上放乙型部件, 设此时系统的可靠度为 P_3 ;

方案二: ①②位置上放不同型部件, ③④位置上放不同型部件, 不妨设①③位置上放甲型部件, ②④位置上放乙型部件, 设此时系统的可靠度为 P_4 .

$$P_3 = [1 - (1-p)^2][1 - (1-q)^2] = (2p - p^2)(2q - q^2) = 4pq - 2pq^2 - 2qp^2 + p^2q^2 = pq(4 - 2p - 2q + pq) = \frac{2}{3}pq + p^2q^2;$$

$$P_4 = [1 - (1-p)(1-q)]^2 = (p+q-pq)^2 = \frac{25}{9} - \frac{10}{3}pq + p^2q^2.$$

$$P_3 - P_4 = 4pq - \frac{25}{9} = 4p\left(\frac{5}{3} - p\right) - \frac{25}{9} = -4p^2 + \frac{20p}{3} - \frac{25}{9} = -4\left(p - \frac{5}{6}\right)^2.$$

因为 $p+q = \frac{5}{3}$, 所以 $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$, $P_3 - P_4 = -4\left(p - \frac{5}{6}\right)^2 \leq 0$, 即

$P_3 \leq P_4$, 故当 $p=q = \frac{5}{6}$ 时, 两个方案都可以, 当 $p \neq q$ 时, 方案

二可靠度更高.



题组 3

1. A 命题点 ① 相关系数的意义及辨析

【解析】观察散点图可知, A 图中的散点更集中落在一条直线附近. 故选 A.

2. B 命题点 ② 正态曲线的性质, 样本相关系数的意义

【解析】A 选项, 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 可知正态曲线关于直线 $x = \mu$ 对称, 故有 $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$, 故 A 正确;

B 选项, 由 $X \sim N(1, 2^2)$, 可知 $P(X < 1) = 0.5$,

由 $Y \sim N(2, 2^2)$, 可知 $P(Y < 2) = 0.5$,

故 $P(X < 1) = P(Y < 2)$, 故 B 错误;

C 选项, 样本相关系数 r 的范围是 $[-1, 1]$, $|r|$ 越接近于 1, 则两个变量之间线性相关程度越强, 故 C 正确;

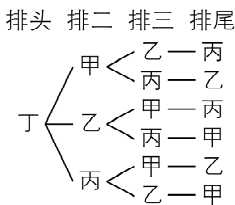
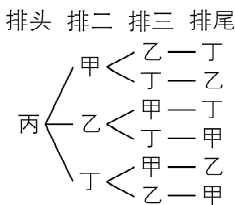
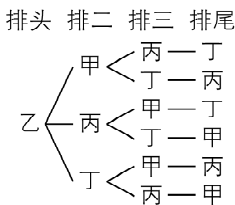
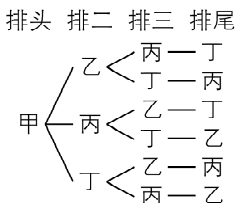
D 选项, 样本相关系数 r 接近于 0 时, 两个变量之间几乎没有线性相关性, 故 D 正确. 故选 B.

3. AC 命题点 ③ 样本的数字特征

【解析】平均数和中位数反映的是一组数据的平均水平, 标准差和极差则体现了一组数据的离散程度. 故选 AC.

4. C 命题点 ④ 古典概型

【解析】甲、乙、丙、丁四人排成一排, 所有情况的树状图如下:



由图可知, 共有 24 种等可能的排列情况, 其中符合题意的排

列情况有 8 种, 故所求概率为 $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. 故选 C.



5. A 命题点 条件概率

【解析】从该地的中学生中任取一名学生，记 A 表示事件“取到的学生爱好滑冰”， B 表示事件“取到的学生爱好滑雪”。

由题设知 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.7$ ，由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ，得 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.7 = 0.4$ 。

故所求的概率为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$ 。故选 A。

6. BCD 必刷题型 概率与数列的综合问题

【解析】由题意可知 $\frac{P(A_1)}{P(B_1)} = 0.1$ ，且 $P(B_1) = 1$ ，

所以 $P(A_1) = 0.1$ 。

因为 $\frac{P(A_n)}{P(B_n)} = 0.1$ ，所以 $P(B_n) = 10P(A_n)$ ①。

由 $\frac{P(A_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \frac{P(A_{n-1})}{P(A_{n-1}) + P(B_n)} = 0.1 (n \geq 2)$ ，可得 $P(B_n) = 9P(A_{n-1})$ ②。

由①②可得 $10P(A_n) = 9P(A_{n-1}) (n \geq 2)$ ，即 $\frac{P(A_n)}{P(A_{n-1})} = 0.9$ ，所以 $\{P(A_n)\}$ 是首项为 0.1，公比为 0.9 的等比数列，所以

$P(A_n) = 0.1 \times 0.9^{n-1}$ ，所以 $P(A_2) = 0.09$ ，故 A 错误；

$P(B_n) = 10P(A_n) = 0.9^{n-1}$ ，故 B 正确；

因为 $a_n = P(A_{n+1} | B_2) = \frac{P(A_{n+1}B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(A_{n+1})}{P(B_2)} = \frac{0.1 \times 0.9^n}{0.9} =$

$0.1 \times 0.9^{n-1}$ ，所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，故 C 正确；

因为 $S_n = 0.1n \times 0.9^{n-1}$ ，则 $T = \sum_{k=1}^n S_k = 0.1 \times (1 \times 0.9^0 + 2 \times 0.9^1 + 3 \times 0.9^2 + \cdots + n \times 0.9^{n-1})$ ，

所以 $0.9T = 0.1 \times (1 \times 0.9^1 + 2 \times 0.9^2 + 3 \times 0.9^3 + \cdots + n \times 0.9^n)$ ，

两式相减可得 $0.1T = 0.1 \times (0.9^0 + 0.9^1 + 0.9^2 + \cdots + 0.9^{n-1} - n \times 0.9^n)$ ，即 $T = 0.9^0 + 0.9^1 + 0.9^2 + \cdots + 0.9^{n-1} - n \times 0.9^n = \frac{1-0.9^n}{1-0.9} - n \times$

$0.9^n = 10(1-0.9^n) - n \times 0.9^n = 10 - (n+10) \times 0.9^n < 10$ ，故 D 正确。故选 BCD。

7. $\frac{6}{35}$ 命题点 古典概型及其应用

【解析】依题意，正方体共有 6 个正方形的面和 6 个对角面，因此从 8 个顶点中任选 4 个，这 4 个点在同一个平面的概率

题眼

$$P = \frac{12}{C_8^4} = \frac{6}{35}.$$

8. ①0.6 ②3.2 命题点 互斥事件、二项分布的期望

【解析】①小桐一周跑 11 圈有两种情况：第一次跑 5 圈、第二次跑 6 圈和第一次跑 6 圈、第二次跑 5 圈，两种情况的概率分别为 $P_1 = 0.5 \times 0.6 = 0.3, P_2 = 0.5 \times 0.6 = 0.3$ ，所以小桐一周跑 11 圈的概率 $P = P_1 + P_2 = 0.3 + 0.3 = 0.6$ 。

②小桐一周跑的圈数的所有可能取值为 10, 11, 12，其中达标



的圈数为 11, 12, 则小桐一周内运动量达标的概率 $P = 1 - 0.5 \times 0.4 = 0.8$. 合格周数 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, X 服从二项分布 $B(4, 0.8)$, 所以 X 的数学期望 $E(X) = 4 \times 0.8 = 3.2$.

知识速记 若随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 则 X 的数学期望 $E(X) = np$, 方差 $D(X) = np(1-p)$.

9. 命题点 ①样本数据的数字特征, 超几何分布求概率, 回归分析的应用

【解】(1) 由题中的数据是按从小到大的顺序排列的, 可知该组数据的极差为 $216.93 - 206.78 = 10.15$, 2 分

中位数为 $\frac{209.35 + 210.68}{2} = 210.015$ 4 分

(2) 10 个数据中有 4 个数据是大于 211 的, 故从中任意抽取 3 个数据, 恰有 2 个大于 211 的概率 $P = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$ 8 分

(3) **第一步: 根据题中数据求出比赛成绩的平均值 $\bar{y}$.**

由题意可得 $\bar{y} = \frac{1}{10} \times (206.78 + 207.46 + 207.95 + 209.34 + 209.35 + 210.68 + 213.73 + 214.84 + 216.93 + 216.93) = 211.399$, 10 分

第二步: 由回归直线过样本点的中心求得 $\hat{a}$ 及回归直线的方程.

由回归直线过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$,

可得 $211.399 = -0.311 \times 2\ 006 + \hat{a}$, 解得 $\hat{a} = 835.265$,

则回归直线的方程为 $y = -0.311x + 835.265$ 12 分

第三步: 代入年份, 求得预测成绩.

当 $x = 2\ 028$ 时, $y = -0.311 \times 2\ 028 + 835.265 = 204.557 \approx 204.56$,

故预测 2028 年冠军队的成绩为 204.56. 14 分

10. 命题点 ①频率及独立性检验

【解】(1) 由题中表格可得甲机床生产的产品中一级品的频率

为 $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$, 2 分

乙机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{120}{200} = \frac{3}{5}$, 3 分

所以甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}$.

..... 4 分

(2) 由题中表格数据可得 $K^2 = \frac{400 \times (150 \times 80 - 50 \times 120)^2}{200 \times 200 \times 270 \times 130} \approx$

$10.256 > 6.635$, 10 分

所以有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异. 12 分

11. 命题点 ①频率分布直方图、平均数、条件概率

【解】(1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄为

$0.001 \times 10 \times 5 + 0.002 \times 10 \times 15 + 0.012 \times 10 \times 25 + 0.017 \times 10 \times 35 + 0.023 \times 10 \times 45 + 0.020 \times 10 \times 55 + 0.017 \times 10 \times 65 + 0.006 \times 10 \times 75 + 0.002 \times 10 \times 85 = 47.9$ (岁). 4 分

(2) 估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间 $[20, 70)$ 的概率 $P = 0.012 \times 10 + 0.017 \times 10 + 0.023 \times 10 + 0.020 \times 10 + 0.017 \times 10 = 0.89$ 8 分

(3) 设事件 A : 此人患这种疾病, 事件 B : 此人年龄位于区间 $[40, 50)$, 则由题意知 $P(AB) = 23\% \times 0.1\% = 0.023\%$, $P(B) = 16\%$,

所以若此人年龄位于 $[40, 50)$, 10 分

则此人患这种疾病的概率 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.023\%}{16\%} \approx$

0.0014 12 分

12. 命题点 ① 离散型随机变量的分布列与数学期望、方案的选择

【解】(1) 由题知, X 的所有可能取值为 $0, 20, 100$,

则 $P(X=0) = 0.2$, $P(X=20) = 0.8 \times 0.4 = 0.32$, $P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$, 3 分

所以 X 的分布列为:

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

..... 5 分

(2) 小明应选择先回答 B 类问题. 理由如下:

由(1)知, $E(X) = 0 \times 0.2 + 20 \times 0.32 + 100 \times 0.48 = 54.4$.

..... 6 分

若小明先回答 B 类问题, 记 Y 为小明的累计得分, 则 Y 的所有可能取值为 $0, 80, 100$, 8 分

则 $P(Y=0) = 0.4$, $P(Y=80) = 0.6 \times 0.2 = 0.12$, $P(Y=100) = 0.6 \times 0.8 = 0.48$, 10 分

所以 $E(Y) = 0 \times 0.4 + 80 \times 0.12 + 100 \times 0.48 = 57.6 > 54.4$,

..... 11 分

所以小明应选择先回答 B 类问题. 12 分

易错警示 本题求解的易错之处有两点: 一是忽视两道题都答对的分数是 100 分, 而不是第二道问题回答正确的分数; 二是忘记相互独立事件的概率公式导致求概率出错.

13. 命题点 ② 统计中的数字特征、样本相关系数

【解】(1) 由题意可知 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 0.6$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 3.9$,

所以这 10 棵树木的根部横截面积和材积量的平均值分别为

$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 0.06$, $\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 0.39$, 所以估计该林区

这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量分别为 0.06 m^2 和 0.39 m^3 2 分

(2) 因为 $r = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}}$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10 \bar{y}^2}} \\
&= \frac{0.2474 - 10 \times 0.06 \times 0.39}{\sqrt{0.038 - 10 \times 0.06^2} \times \sqrt{1.6158 - 10 \times 0.39^2}} \\
&= \frac{0.0134}{\sqrt{0.002} \times \sqrt{0.0948}} = \frac{0.0134}{\sqrt{1.896 \times 10^{-4}}} \approx \frac{134}{137.7} \approx 0.97,
\end{aligned}$$

所以该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数是 0.97. 8 分

(3) 因为树木的材积量与其根部横截面积近似成正比, 所以设 $y=kx$ (k 为常数).

由(1)知该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量的估计值分别为 0.06 和 0.39,

所以 $0.39=0.06k$, 即 $k=\frac{13}{2}$, 所以 $y=\frac{13}{2}x$ 10 分

又因为 $\sum_{i=1}^n x_i = 186$, 所以 $\sum_{i=1}^n y_i = \frac{13}{2} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{13}{2} \times 186 = 1209$,

故该林区这种树木的总材积量的估计值为 1209 m^3 .

..... 12 分

14. 必刷考点 ⊙ 相互独立事件、概率中的最值问题

【解】(1) 设每局比赛棋手胜为事件 A_i , 每局比赛平局为事件 B_i , 每局比赛棋手负为事件 C_i ($i \in \mathbf{N}^*$), “2 局后比赛终止”为事件 M . 因为棋手与机器人比赛 2 局, 所以棋手可能得 0 分或 300 分比赛终止.

① 当棋手得分为 0 分时, 2 局均负, 即 $C_1 C_2$.

② 当棋手得分为 300 分时, 2 局先平后胜, 即 $B_1 A_2$.

因为 $C_1 C_2, B_1 A_2$ 互斥, 所以 $P(M) = P(C_1 C_2 + B_1 A_2) =$

$$P(C_1 C_2) + P(B_1 A_2) = P(C_1)P(C_2) + P(B_1)P(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}, \text{ 所以 2 局后比赛终止的概率为 } \frac{5}{16}.$$

(2) 设“3 局后比赛终止”为事件 D , “3 局后棋手挑战成功”为事件 E .

$$\text{因为 } P(D) = P(B_1 B_2 A_3 + B_1 C_2 C_3 + C_1 A_2 A_3 + C_1 B_2 C_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 +$$

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{64},$$

$$P(E) = P(B_1 B_2 A_3 + C_1 A_2 A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{64}.$$

所以在 3 局后比赛终止的条件下, 棋手挑战成功的概率为

$$P(E|D) = \frac{P(DE)}{P(D)} = \frac{P(E)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{64}}{\frac{11}{64}} = \frac{3}{11},$$



所以在 3 局后比赛终止的条件下, 棋手挑战成功的概率为

$$\frac{3}{11}.$$

(3) 因为 n 局获奖 1 万元, 说明棋手共胜 2 局.

① 当棋手第 n 局以 0 分终止比赛, 说明前 $(n-1)$ 局中有 3 负 2 胜, 且是“负胜负胜负”的顺序, 其余均为平局, 共有 C_{n-1}^5 种情况.

② 当棋手第 n 局以 300 分终止比赛, 说明前 $(n-1)$ 局中有 1 负 1 胜, 且是“先负后胜”的顺序, 其余均为平局, 共有 C_{n-1}^2 种情况.

则“ $n(n \geq 10)$ 局后比赛终止且棋手获奖 1 万元”的概率

$$P(n) = C_{n-1}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-4} + C_{n-1}^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{C_{n-1}^2 + 8C_{n-1}^5}{2^{2n-1}}$$

$$(n \geq 10). \text{ 所以 } \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{C_n^2 + 8C_n^5}{4C_{n-1}^2 + 32C_{n-1}^5}.$$

$$C_n^2 + 8C_n^5 - 4C_{n-1}^2 - 32C_{n-1}^5 = (C_n^2 - 4C_{n-1}^2) + 8(C_n^5 - 4C_{n-1}^5) = \frac{(n-1)(8-3n)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(20-3n)}{15},$$

$$\text{因为 } n \geq 10, \text{ 所以 } C_n^2 + 8C_n^5 - 4C_{n-1}^2 - 32C_{n-1}^5 < 0, \text{ 所以 } \frac{P(n+1)}{P(n)} <$$

$$1, \text{ 所以当 } n=10 \text{ 时, } P(n) \text{ 取最大值, 最大值为 } P(10) = \frac{261}{2^{17}}.$$